Sétra

Service d'études sur les transports, les routes et leurs aménagements

Prise en compte du risque dans l'évaluation des projets de transports :

CSTM-13-020/HLM-XD

Le 4 juin 2013

DOCUMENT DE TRAVAIL

1. Contexte, objectifs et synthèse

Dans le cadre des travaux du Centre d'analyse stratégique sur l'évaluation des projets, les débats autour de la prise en compte du risque et du taux d'actualisation ont mis en lumière deux principales familles de méthodes :

- l'une, dite "du numérateur", consiste schématiquement à appliquer un facteur d'actualisation (représentant la préférence pour le présent indépendamment de la prise en compte du risque), à la séquence des espérances d'utilité sociale (monétarisée) dégagée par le projet ; cette approche est directement issue de la théorie dite de VonNeuman Morgenstern de maximisation de l'espérance de l'utilité

- l'autre, dite "du dénominateur", consiste à corriger le facteur d'actualisation, par un coefficient intégrant le risque, et à appliquer ce facteur à une séquence d'utilités sociales du projet exemptes de risques.

En théorie, ces deux approches devraient fournir les mêmes résultats, elles ne diffèrent que par la forme mathématique choisie pour écrire une somme actualisée.

Dans la pratique, ces deux approches nécessitent chacune, pour être proprement appliquées, un certain nombre d'informations (outre la préférence pour le présent indépendamment du risque), notamment :

- l'aversion collective pour le risque ;
- la distribution de probabilité de la richesse nationale à laquelle contribue le projet ;
- la distribution de probabilité des impacts du projet, connaissance la richesse nationale.

Les simulations numériques détaillées de distributions de probabilités (de type Monte Carlo) sont quant à elles coûteuses pour l'évaluation de projet de transports selon l'une ou l'autre méthode, puisqu'elles conduisent à multiplier les sorties de modèles de demande, eux-mêmes relativement lourds à utiliser.

Aussi, ces deux familles de méthodes appellent chacune des approches simplifiées pour être praticables par des évaluateurs de projets à un coût raisonnable, et sans nécessairement maîtriser les concepts du calcul probabiliste.

Une approche simplificatrice candidate pour le calcul "au dénominateur" consiste simplement à fixer des facteurs de corrections du taux d'actualisation qui soient communs à tous les projets d'un secteur (approche dite du β par secteur). Le principal inconvénient de cette approche est qu'elle revient de fait à nier toute spécificité de chaque projet de transport, donc, de fait, à ne pas prendre en compte de risque dans le choix entre projets (puisque de fait, tous les projets sont supposés avoir le même risque). Une approche de β par sous-secteur ne comblerait pas cette limite de l'approche : au sein même d'un sous-secteur des transports, les avantages d'un projet peuvent être liés aux PIB ou à d'autres indicateurs macro-économiques (prix relatifs de l'énergie) de façon très spécifique à ce projet.

Les divers travaux du SETRA ont largement documenté le fait que les projets de transports avaient bien une spécificité au risque, provenant non seulement du lien entre trafic de référence et richesse nationale (PIB), mais également du lien entre PIB et valeurs unitaires des coûts généralisés utilisés dans les choix entre modes / itinéraires ; et enfin de la spécificité de la composition du trafic et du réseau étudié. Sans compter le fait que chaque projet est souvent lié à un modèle qui, lui aussi, par son imprécision, représente un facteur de risque spécifique au projet.

L'objet de cette fiche est de présenter des approches pour le calcul "au numérateur", qui préservent le pouvoir discriminant de cette méthode entre les différents projets. L'approche étudiée retient comme idée de simplifier la distribution de probabilité des variables de tendances macro-économiques (i.e. le PIB ci-dessous), sous forme de quelques scénarii de probabilité discrète, permettant alors de "dérouler" un calcul de bilan coûts-avantages par scénarii. En termes de calcul à mener, il s'agirait alors simplement de faire "tourner" quelques évaluations du projet chacun à partir d'un scénario macro-économique (typiquement, 3 ou 5 scenarii dans les propositions ci-dessous), puis de probabiliser ces bilans coût-avantages dans la formule de bénéfice actualisé risqué qui est rappelée au chapitre suivant. A noter que cette approche est dans la continuité des approches par scenarii déjà recommandés pour l'évaluation des projets de transports.

Cette fiche se propose notamment tester de la faisabilité de cette approche sur un cas d'infrastructure stylisé et de comparer ces résultats (par nature "approchés") à un calcul de type Monte Carlo fin (avec des milliers de tirages – donc plus proche du calcul théorique).

De plus, cette fiche tente, à la demande du groupe du CAS, de rapprocher l'évaluation du risque par une approche au numérateur, avec celle d'une approche au dénominateur, en déterminant les scénarii macro-économiques permettant d'égaliser les valeurs actualisées nettes de projets-types calculées selon les deux approches, l'approche au dénominateur étant "normée" à une prime de risque de 1%.

Cette fiche est organisée de la façon suivante :

- elle rappelle le calcul du bénéfice net actualisé issu de la théorie de Von Neuman Morgenstern, dans l'approche du numérateur ;

- elle applique ce calcul à des projets stylisés d'infrastructures routières, en tenant de mesurer l'écart entre une approche "pure" (i.e. où les scénarii d'aléas sont tirés par une méthode de Monte Carlo), avec une approche "simplifiée", dans laquelle on retient un nombre limité (10 ou 5 scénarii) : cette partie laisse penser que le fait de "discrétiser" ainsi la distribution des scénarii fournit une estimation assez précise du résultat (ici, les scénarii utilisés portent sur le taux de croissance moyen du PIB sur lo,ngue période tirés dans une loi normale) ;

- elle applique l'approche du numérateur ci-dessus avec des scénarii de PIB contrastés, incluant notamment la probabilité d'un scénarii de "crise de 1929" : dans ce cas, il apparaît que la prime de risque équivalente, si l'on choisissait une approche au dénominateur au lieu d'une approche au numérateur, serait d'environ 0,3 à 0,4% ;

- elle revient ensuite sur une formulation de l'approche au dénominateur, en retenant une forme donnée de la fonction d'utilité, ce qui évite des approximations sur les utilités marginales ;

- elle applique cette approche également à des projets stylisés, et retrouve, pour des scénarii de PIB similaires aux scénarii de la partie ci-dessus, des primes de risques de l'ordre de 0,3% ;

- dans le but de rechercher la cohérence numérique entre les approches au numérateur et au dénominateur, à la demande du groupe du CAS, elle détermine ensuite les scénarii macro-économiques qui, pour les projets de transports stylisés utilisés, conduirait à une prime de risque moyenne de l'ordre de 1% si l'on retenait une approche au dénominateur plutôt qu'une approche au numérateur, sur un portefeuille de projets ;

- une première annexe rappelle et illustre comment le lien entre PIB et avantages du projet est spécifique aux caractéristiques de ce dernier, ce qui empêche l'utilisation d'une approche au dénominateur avec une prime de risque uniforme au sein du secteur des transports ;

- une seconde annexe illustre le fait que l'enjeu de la prise en compte des incertitudes réside aussi en partie dans les risques de mauvaise évaluation de la demande de transports, qui est spécifique au projet, ce que risque de masquer l'utilisation d'une approche au dénominateur avec une prime de risque uniforme au sein du secteur des transports.

En synthèse, cette fiche confirme que l'approche au numérateur (à laquelle l'approche au dénominateur est en théorie équivalente) :

- assure une prise en compte du risque spécifique au projet (ce qui est le premier objectif recherché au travers d'une meilleure prise en compte du risque dans l'évaluation) ;

- est calculable avec un nombre limité de scénarii macro-économiques (qui pourraient être enrichis par rapport à la seule variable PIB utilisée dans cette fiche, notamment sur la question des prix relatifs, en particulier de l'énergie) ;

- fournit des ordres de grandeur de primes de risques (si celui-ci porte sur les tendances de long terme ce qui est le cadre d'analyse a priori adapté aux infrastructures de transports) de l'ordre de 0,3% à 0,5%, bien entendu très dépendant du projet ;

- peut être "normée", par le choix de scénarii de PIB, de manière à retrouver, en moyenne sur un portefeuille de projets, un niveau de primes de risque fixé de façon exogène (par exemple 1%) ; mais que les scénarii de PIB sous-jacents sont alors très contrastés.

Avertissement : il convient de noter que, dans cette fiche, des scénarii macro-économiques sont utilisés, de même que des distributions de probabilités : ces distributions de probabilité des scénarii de PIB sont issus soit de travaux de la Caisse des dépôts et consignations présentés au groupe du CAS soit présentés de façon illustrative pour les besoins de cette fiche, mais qu'en tout état de cause, fixer ces éléments sur la croissance n'est pas de la compétence du SETRA.

2. Présentation de la démarche approchée

Le cadre micro-économique de Von Neuman Morgenstern pour la prise en compte du risque dans un projet de transports conduit à considérer la valeur du projet comme l'écart entre la séquence actualisée des utilités collectives avec et sans projet, soit :

$$BNA = \sum_{t=0}^{\infty} \left[e^{-\delta t} E\left(u(C_t + X_t) - u(C_t) \right) \right]$$

où :

Xt représente les avantages nets du projet à l'année t
Ct représente la richesse collective
δ représente le taux de préférence pure pour le présent

La formule du BNA ci-dessus peut s'écrire ainsi, dans les conditions de validité des développements limités au deuxième ordre :

$$BNA = \sum_{t=0}^{\infty} \left[e^{-\delta t} E\left(X_t u'(C_t) \right) \right]$$

$$= \sum_{t=t_0}^{\infty} \left[e^{-\delta t} \left(u'(E(C_t)) \right) \left(E(X_t) - \gamma \frac{\mathrm{cov}(C_t ; X_t)}{E(C_t)} \right) \right]$$

Soit, en reprenant le coefficient d'actualisation dit "sans risques " du rapport Lebègue

$k_t = \quad e^{-\delta t} . u' (E (C_t))$

On peut réécrire

$$\sum_{t=t_0}^{T} \left[k_t \left(E(X_t) - \gamma \frac{\mathrm{cov}(C_t ; X_t)}{E(C_t)} \right) \right]$$

ou encore :

$$\sum_{t=0}^{T}\left[k_t.E(X_t).\left(1-\gamma\frac{\operatorname{cov}(C_t;X_t)}{E(X_t).E(C_t)}\right)\right]$$

Pour calculer le facteur correctif du risque ci-dessus $\gamma\frac{\operatorname{cov}(C_t;X_t)}{E(X_t).E(C_t)}$ on retient des scénarii de croissance économique qui sont caractérisés par le taux de croissance annuel moyen sur longue période, ce taux de croissance annuel moyen constituant la variable aléatoire.

Ci-dessous, on considèrera d'une part une distribution en 3 scénarii autour de la moyenne, d'une part une distribution de 5 scenarii autour de la moyenne. Cette distribution de 5 scénarii vise à approcher une loi normale.

3. Présentation des projets stylisés

Les projets testés sont les suivants :

Projet P1 : On suppose un projet de doublement d'une route nationale ordinaire à 2x1 voies sur 50 kilomètres par une autoroute à 2x2 voies à péage de 55 km. Il n'y a pas d'échangeur intermédiaire. Le terrain est supposé « plat ». La demande initiale est de 30000 véhicules dont 10% de PL. On fait des affectations sur deux arcs selon la loi d'Abraham.

Projet P2 : On suppose un projet de doublement d'une route nationale ordinaire à 2x1 voies sur 20 kilomètres par une 2x2 voies de 25 km. Le terrain est supposé « plat ». La demande initiale est de 20000 véhicules dont 8% de PL. On fait des affectations sur deux arcs selon la loi d'Abraham.

Hypothèses :

On applique les valeurs de l'instruction cadre en vigueur. L'élasticité de la demande au PIB est de 1,1. Les élasticités des valeurs unitaires du coût généralisé au PIB sont les suivantes :

Nom	Evolution
Valeur du temps VL	Elasticité de 0,7 à la croissance de la CFM par tête.
Valeur du temps PL	Elasticité de 2/3 à la croissance du PIB
Sécurité	Elasticité de 1 à la croissance de la CFM par tête.
Coût de la pollution	Elasticité de 1 à la croissance de la CFM par tête.

On réalise trois calculs pour chaque cas :
Le premier correspond au calcul classique non risqué avec un taux de croissance annuel du PIB pris à la moyenne des scénarii ci-dessus (soit 1,5%)

BNA 1 = $\sum_{t=0}^{T}\left[k_t.E(X_t)\right]$

Le second calcul correspond à un calcul avec risque au numérateur et lois de probabilité sur la croissance approchées (3 scenarii ou 5 scenarii selon la variante) :

BNA 2 = $\sum_{t=0}^{T}\left[k_t.E(X_t).\left(1-\gamma\frac{\operatorname{cov}(C_t;X_t)}{E(X_t).E(C_t)}\right)\right]$

Le second calcul correspond à un calcul avec risque au numérateur et lois de probabilité sur la croissance représentées par des tirages de Monte Carlo

$$\text{BNA 3} = \sum_{t=0}^{T}\left[k_t.E(X_t).\left(1-\gamma\frac{\operatorname{cov}(C_t;X_t)}{E(X_t).E(C_t)}\right)\right]$$

Dans les calculs ci-dessous, on considère un facteur $k_t = (1+4\%)^t$

4. Résultats

4.1. Résultats avec un écart type du taux de croissance du PIB à 0.3%

Calcul avec 3 scenarii probabilisés sur le taux de croissance du PIB :

TCAM du PIB	probabilité
1 %	25 %
1,5 %	50 %
2 %	25 %

	P1	P2
BNA 1	719 M €	97,5 M€
BNA 2	692 M €	93,0 M€
BNA 3	699 M €	94,1 M€

Calcul avec 5 scenarii probabilisés sur le taux de croissance du PIB (moyenne : 1,5% / an : écart-type : 0,3% par an) :

TCAM du PIB	probabilité
0,9 %	6 %
1,2 %	25 %
1,5 %	38 %
1,8 %	25 %
2,1%	6 %

	P1	P2
BNA 1	719 M €	97,5 M€
BNA 2	700 M €	94,3 M€
BNA 3	699 M €	94,1 M€

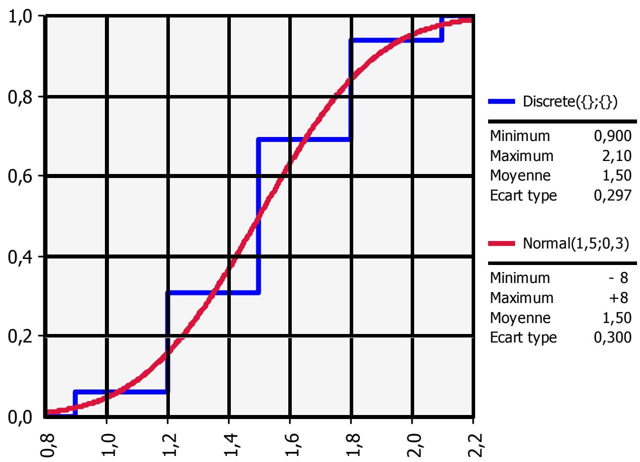


Figure 1 : :comparaison des distributions cumulées des lois normale et discrète

4.2. Résultats avec un écart type du taux de croissance du PIB à 0.5%

Calcul avec 3 scenarii probabilisés sur le taux de croissance du PIB :

TCAM du PIB	probabilité
0.8 %	25 %
1,5 %	50 %
2.2 %	25 %

	P1	P2
BNA 1	719 M €	97,5 M€
BNA 2	666 M €	88,3 M€
BNA 3	665 M €	88,0 M€

Calcul avec 5 scenarii probabilisés sur le taux de croissance du PIB (moyenne : 1,5% / an : écart-type : 0,5% par an) :

TCAM du PIB	probabilité
0,5 %	6 %
1,0 %	25 %
1,5 %	38 %
2.0 %	25 %
2,5%	6 %

	P1	P2
BNA 1	719 M €	97,5 M€
BNA 2	665 M €	88,1 M€
BNA 3	665 M €	88,0 M€

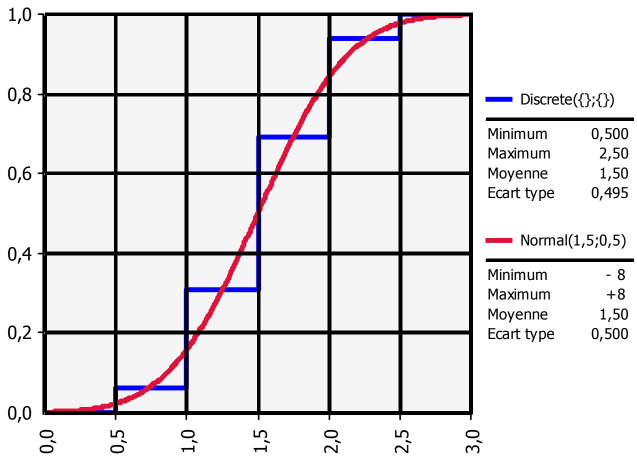


Figure 2 :comparaison des distributions cumulées des lois normale et discrète

Les simulations précédentes suggèrent que ces calculs approchés sont faisables et fournissent une erreur faible par rapport à un calcul "pur" avec des tirages de Monte Carlo plus complets (effectués ci-dessus sur une Loi Normale).

5. Résultats sur des scénarios probabilisés du PIB incluant des scenarii de "rupture" de moyen terme

NB : on rappelle que ci-dessous, le taux sans risque est considéré par hypothèse égal à 4%. L'écart entre le taux d'actualisation équivalent déterminé par la formule ci-dessous (dont on rappelle qu'il constitue un artifice de calcul pour ramener au dénominateur les calculs d'espérance actualisée des avantages, qui se calcule normalement au numérateur) et le taux d'actualisation sans risque représente la "prime de risque" qui serait déduite d'une formule au dénominateur.

- **Au numérateur :**

$$\sum_{t=0}^{T}\left[e^{-a.t}.E(X_t).\left(1-\gamma\frac{\mathrm{cov}(C_t;X_t)}{E(X_t).E(C_t)}\right)\right]$$

- **Au dénominateur :**

$$\sum_{t=0}^{T}\left[e^{-a'.t}.E(X_t)\right]$$

a' – a est la variable d'intérêt pour représenter la prime de risque.

On note que les scenarii de PIB utilisés ci-dessous comportent des "ruptures" significatives, ce qui peut avoir deux effets :

- sortir du domaine d'application des développements limités utilisés pour l'application de la formule $BNA=\sum_{t=0}^{\infty}\left[e^{-\delta t}E\left(X_t u'(C_t)\right)\right]$;
- rendre l'application des élasticité hasardeuse.

Néanmoins, ces tests ont été conduites, à la demande du CAS, avec des scénarii macro-économiques "heurtés", sur lesquels le SETRA ne se prononce pas.

5.1. Résultats sur le projet simplifié

On applique au projet 1 présenté ci-dessus, des scénarios de PIB pour lesquels le taux de croissance annuel moyen du PIB varie dans le temps, incluant notamment des scenarii de récession de moyen terme (selon les cas, 5 ou 10 ans). L'ajout de ces scenarii est destiné à illustrer l'effet de fluctuations du PIB sur des périodes inférieures à 50 ans, en plus de l'effet de l'incertitude sur la tendance du PIB sur 50 ans. Aussi, les scenarii avec fluctuations de PIB infra-période de 50 ans conservent-ils une tendance moyenne égale au scénario central (soit 1,5% pan), ce qui suppose donc une forme de rattrapage (ce qui d'ailleurs s'est observé dans les scénarii historiques mis en avant par la Caisse des dépôts). Le scénario le plus extrême ci-dessous correspond à une baisse du PIB de 5% par an pendant 10 ans, sa probabilité est de 2%.

Pour le projet 1, on obtient les résultats suivants :

BNA 1 (TCAM du PIB à 1,5%)	719 M€
BNA 2 (Equivalent certain)	632 M€

Le calcul en équivalent certain correspond à un taux d'actualisation équivalent de 4,43%.

(On rappelle de nouveau que le taux d'actualisation équivalent constitue un artifice de calcul pour ramener au dénominateur les calculs d'espérance actualisée des avantages, qui se calcule normalement au numérateur).

5.1. Résultats sur un projet calé sur un cas réel

Description du cas

Il s'agit d'un projet d'aménagement d'une route nationale à 2*1 voie en une autoroute à 2*2 voies non concédée. Ce projet comprend notamment 4 déviations d'agglomération et un pont. La longueur du projet évalué est de 68 km en situation de projet et 66 km en situation de référence. Les coûts de construction sont de 325 M€$_{2010}$. Les données sont basées sur un cas réel, déjà mis en service et les coûts et trafics ont été repris d'un bilan ex-post. Il a été découpé en 4 tronçons dont les caractéristiques sont indiquées dans le tableau suivant :

Tronçon 1	**Projet**	**Référence**
Longueur (km)	3	3
Trafic (veh/j) année MES (VL+PL)	25000	20000
Part PL	15%	15%
Type VDF	2x2 voies (autoroute non concédée)	2 voies rapides
Type de zone	rase campagne	urbain diffus
Tronçon 2	**Projet**	**Référence**
Longueur (km)	32	32
Trafic (veh/j) année MES	25000	20000
Part PL	15%	15%
Type VDF	2x2 voies (autoroute non concédée)	2x1 voies/14m
Type de zone	rase campagne	rase campagne
Tronçon 3	**Projet**	**Référence**
Longueur (km)	23	23
Trafic (veh/j) année MES	25000	21000
Part PL	15%	15%
Type VDF	2x2 voies (autoroute non concédée)	2 voies rapides
Type de zone	rase campagne	urbain diffus
Tronçon 4	**Projet**	**Référence**
Longueur (km)	10	8
Trafic (veh/j) année MES	25000	21000
Part PL	15%	15%
Type VDF	2x2 voies (autoroute non concédée)	2 voies normales
Type de zone	urbain diffus	urbain dense

Pour le projet présenté ci-dessus, on obtient les résultats suivants :

BNA 1 (TCAM du PIB à 1,5%)	8,96 Md €

BNA 2 (Equivalent certain)	7,98 Md €

Le calcul en équivalent certain correspond à un taux d'actualisation équivalent de 4,34%.

5.2.Modèle simplifié à deux périodes et à élasticité trafic / PIB forfaitaire

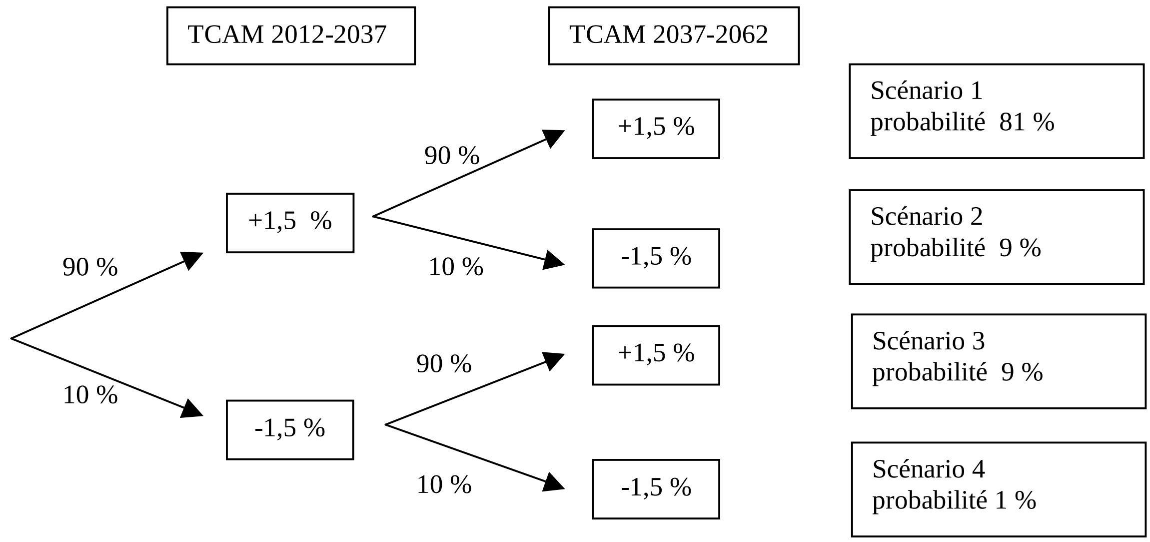
L'objet de cette dernière partie est double :

- laisser de côté temporairement la question de la valeur de l'élasticité des avantages du projet au PIB (dont le SETRA a par ailleurs mis en avant qu'elle dépend du projet), en retenant une valeur haute (l'élasticité des avantages au PIB est ici fixée à **2**) ;

- tester, sur des scenarii de PIB simplifiés à l'extrême, le fait que l'on retrouve des "primes de risques équivalentes" relativement faibles, y compris en considérant des scénarii de PIB contrastés entre sous-périodes.

On simplifie alors le projet à l'extrême, en gardant 2 sous-périodes de 25 ans, donc avec 2 bifurcations des scénarios macro-économiques, l’une en 2012 et l'autre en 2037.

On a ainsi le schéma suivant :



Le projet est "normalisé", un coût d'investissement de 100 000 KEuros, et des avantages nets la première année de 4000 KEuros. La VAN du projet (au taux de 4%, sans risque, avec un TCAM du PIB de 1,5% par an) est de l'ordre 9 500 KEuros.

Les résultats obtenus sont du même ordre de grandeur que précédemment, le taux d'actualisation équivalent intégrant le risque macro lié au scenarii ci-dessus, est de 4,4%

NB : avec une élasticité avantages / PIB de 1 (au lieu de 2) le taux d'actualisation équivalent est de 4,25%.

En conclusion, il apparaît que, si l'on reste dans un cadre où le risque porte sur la tendance de la croissance (ce qui apparaît légitime pour des projets de transports qui s'analysent à moyen terme), les "primes de risques " équivalentes sont relativement faibles (de l'ordre de 0,4%) ; le fait de rajouter des scenarii de PIB plus heurtés ne modifie pas fondamentalement cet ordre de grandeur, sauf à considérer que l'incertitude sur le PIB devient de nature chaotique (cf. approche de Barro citée dans le rapport Gollier : risque de baisse de PIB de 50% chaque année, de probabilité de 2%). En tout état de cause, il n'est pas de la compétence du SETRA de proposer des scenarii macro-économique, a fortiori des scenarii chaotiques.

5. Approche au numérateur : scénarii macro-économiques sous-jacents à une prime de risque normée par l'approche au dénominateur.

Dans le cadre des travaux du CAS l'approche simplifiée ci-dessus (consistant, schématiquement, à calculer la valeur actualisée de l'espérance d'utilité du projet, avec un nombre limité de scénarii macro-économiques probabilisés) a conduit . le groupe de travail à creuser la question des scénarii macroéconomiques, qui sont dimensionnants pour une telle approche. Il a été demandé au SETRA, de proposer des scenarii de PIB "normés" pour la poursuite des travaux, étant entendu que le SETRA ne dispose pas de compétences ni de légitimité pour l'élaboration de scénarii macro-économiques.

Il s'agit donc bien ci-dessous d'une approche de scénarii illustratifs, suffisamment contrastés, visant à tester l'impact de l'application de la méthode au numérateur simplifiée.

On entend par "normés" des scenarii de PIB tels que, pour un "projet type" de transports, la prise en compte du risque (au numérateur) par la méthode "pure" de l'espérance de l'utilité, conduirait, par une approche au dénominateur, à une prime de risque de l'ordre de 1%. L'idée sous-jacente est de s'assurer que les scenarii macro-économiques envisagés aient un pouvoir suffisamment discriminants entre projets, pour appliquer la méthode du numérateur.

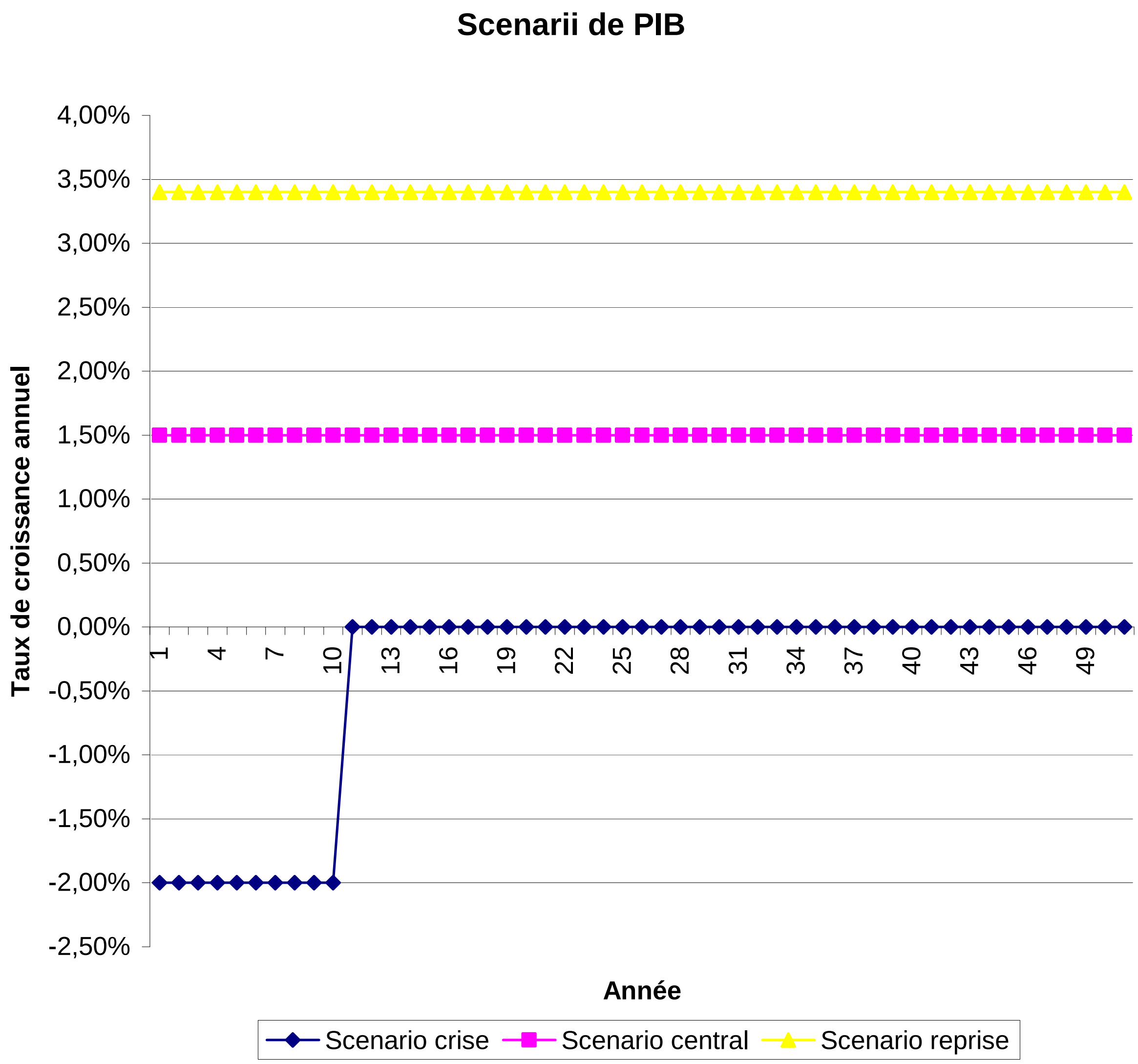
Cette fiche vise à proposer de tels scenarii. Elle considère 3 scénarii, dont le scénario "central" de croissance de 1,5% par an du PIB. Les deux autres scénarii sont respectivement :

- le scénario "de crise" : baisse du PIB de 2% par an pendant 10 ans, puis stagnation
- le scénario "de reprise" : hausse du PIB de 3,4% par an.

La probabilité des scénarii est la suivante :

Crise	0,25
Central	0,5
Reprise	0,25

Cette combinaison assure une espérance de croissance à long terme de 1,5% par an.



La prise en compte du risque s'effectue sur un projet-type caractérisé par un investissement initial normé et un flux annuel de recettes dépendant du PIB avec une élasticité (β) paramétrée. Plusieurs projets-types sont testés, selon leur degré de rentabilité (illustré ci-dessous par leur TRI en scénario central).

La prise en compte du risque au numérateur est effectuée par la méthode dite "Von Neuman Morgenstern à la source" proposée par le SETRA :

La fonction d'utilité est de type :

$U(C) = C^{1-\gamma} / (1-\gamma)$
avec $\gamma = 2$
(cf. proposition de la Caisse des Dépôts et Consignations)

On calcule alors VAN_1 = valeur actualisée de E [U(Ct+Xt) - U(Ct)], au taux d'actualisation de la préférence pure pour le présent (1%).

La valeur du projet, prenant en compte le risque, est VAN_2 telle que :

$$E\left[U(C_0+VAN_2)-U(C_0)\right] = VAN_1$$

On calcule ensuite la "prime de risque équivalente par la méthode du dénominateur", r, définie par :

$$VAN_2 = \sum_{t=0}^{\infty}\left[e^{-(\delta+r)t}E(X_t)\right]$$

où δ est le taux sans risque (pris ici égal à 4%).

Les résultats sont fournis ci-après.

Les scénarii de PIB proposé conduisent à des "primes de risques équivalentes" de 1%. Cet ordre de grandeur de la prime de risque est obtenu pour les valeurs de l'élasticité des avantages du projet au PIB (β) telles que calculées de façon illustrative et sommaire dans le rapport Gollier (soit β=2).

Hypothèses	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**
PIB 2012 (milliards d'Euros)	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
Inveslissement initial du projet (millions d'Euros)	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100
Préférence pure pour le présent	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%
Elasticité avantages / PIB	***1,2***	***1,5***	***2***	***1,2***	***1,5***	***2***	***1,2***	***1,5***	***2***
Avantages annuels initiaux / investissement	***0,04***	***0,04***	***0,04***	***0,06***	***0,06***	***0,06***	***0,08***	***0,08***	***0,08***
Gamma	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Caractéristiques "illustratives" du projet									
TRI du projet en scénario "central"	5,0%	5,5%	6,3%	7,5%	8,0%	8,8%	9,7%	10,3%	11,0%
Application de la formule de Von Neuman Morgenstern									
E (VAN) du projet au taux de 4% (sans risque) (millions d'Euros)	30	51	105	95	127	207	160	202	309
Valeur du projet : Z0 tel que [U(C0+Z0) - U(C0)] = valeur actualisée de E [U(Ct+Xt)-U(Ct)] (millions d'Euros)	22	31	53	89	103	138	160	180	230
Correction à apporter au taux d'actualisation équivalent, à appliquer au dénominateur, au calcul des avantages en espérance au numérateur	***0,30%***	***0,60%***	***1,10%***	***0,15%***	***0,50%***	***1,00%***	***0,00%***	***0,30%***	***0,85%***

Le tableau ci-dessus illustre également, de nouveau, la sensibilité de la prime de risque à la valeur du β, qu'a rappelée le SETRA à plusieurs occasions.

Ceci étant, cette sensibilité à la valeur du β est cohérente avec l'objectif recherché de pouvoir discriminer les projets selon leur sensibilité à des scénarii macro économiques contrastés : ceci renforce, au regard de l'objectif de discrimination, l'intérêt de l'approche du numérateur simplifiée (avec un nombre fini de scénarii) proposée par le SETRA pour prendre en compte le risque dans l'évaluation des projets (discrimination que ne permet pas l'approche au dénominateur avec une prime de risque forfaitaire unique – cf. annexe 1).

Le groupe du CAS a demandé au SETRA de proposer des scénarii de PIB qui, tout en restant illustratifs, seraient moins contrastés que ceux utilisés ci-dessus (évitant notamment un scénario de crise dans lequel la croissance de long terme serait négative). Il a demandé de caractériser ces scénarii par le taux d'actualisation équivalent, permettant de retrouver le bénéfice net actualisé du projet dans le scénario central, supposé sans risque.

(On rappelle de nouveau que le taux d'actualisation équivalent constitue un artifice de calcul pour ramener au dénominateur les calculs d'espérance actualisée des avantages, qui se calcule normalement au numérateur).

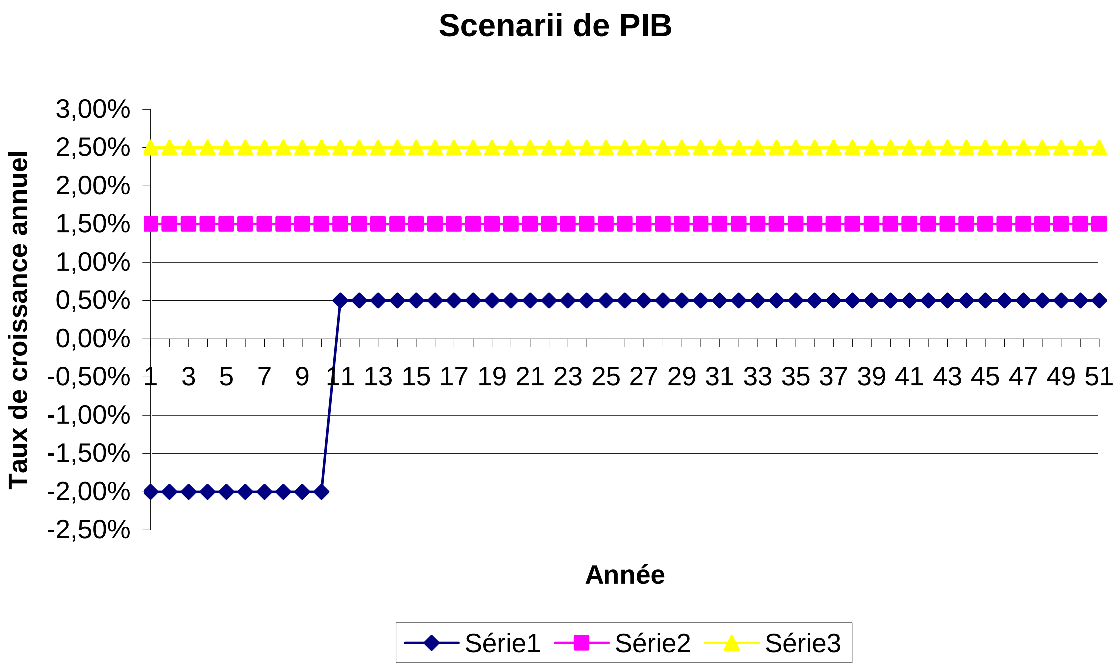
Un jeu de scénarii correspondant à ces critères serait le suivant : 3 scénarii, dont le scénario "central" de croissance de 1,5% par an du PIB. Les deux autres scénarii sont respectivement :

- le scénario "de crise" : baisse du PIB de 2% par an pendant 10 ans, puis augmentation de 0,5% par an ; le taux de croissance annuel moyen sur les 50 ans serait de 0%.
- le scénario "de reprise" : hausse du PIB de 2,5% par an.

La probabilité des scénarii est la suivante :

Crise	0,2
Central	0,5
Reprise	0,3

Cette combinaison assure une espérance de croissance à long terme de 1,5% par an.



La prime de risque équivalente selon l'approche ci-dessus serait ramenée à 0,4% à 0,5% pour un projet présentant une élasticité des avantages au PIB de 2

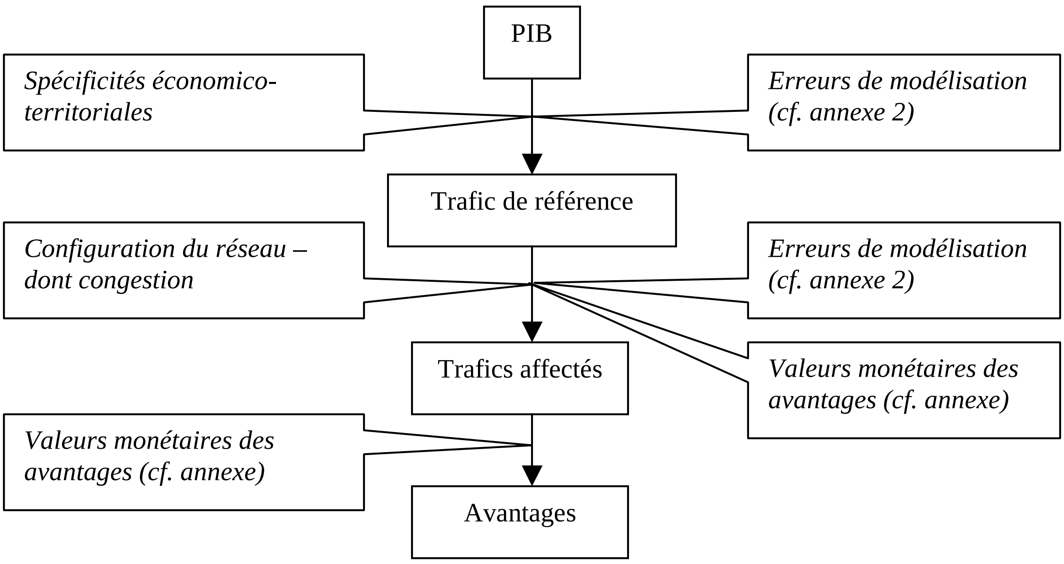
Les taux d'actualisation équivalents permettant de retrouver, pour chacun des deux scénarii (de crise et de reprise), le bénéfice net actualisé calculé par une approche sans risque dans le scénario central seraient :

Annexe 1 : élasticité des avantages d'un projet au PIB : spécificités liées au projet

Cette annexe vise à fournir quelques éléments illustrant en quoi l'élasticité entre le bilan coûts-avantages du projet et le PIB dépend du projet considéré. Elle rappelle ainsi en quoi une approche du béta (qui fait, schématiquement, le lien entre trafic de référence et PIB), est inapte à refléter la diversité des liens entre PIB, trafic de référence, trafic de projet et avantages du projet. La spécificité du projet joue sur la prise en compte du risque dans l'évaluation, et notamment :

- le lien entre situation de référence et PIB est spécifique au projet ; il traduit notamment les spécificités géographiques de la composition du trafic et des motifs de déplacements ;
- le risque d'erreur de modélisation est clairement spécifique au projet et à son modèle sous-jacent ;
- le lien entre avantages du projet et PIB dépend non seulement du trafic de référence, mais aussi des valeurs unitaires des avantages utilisés dans la modélisation et le calcul des surplus ;
- le lien entre trafic de référence et avantages, indépendamment même de l'effet des valeurs unitaires, dépend des caractéristiques du projet et du réseau considéré, avec notamment de fortes non linéarités dès qu'apparaissent des phénomènes de congestion.

Le graphique ci-dessous illustre comment intervient cette spécificité du projet, à chaque étape de l'évaluation du projet.



Ceci confirme qu'une prise en compte du risque via une correction du taux d'actualisation commune à tous les projets ("β" du secteur des transports) gommerait toutes ces spécificités, ce qui n'irait probablement pas dans le sens d'une meilleure transparence ni d'une meilleure incitation à connaître et maîtriser les risques.

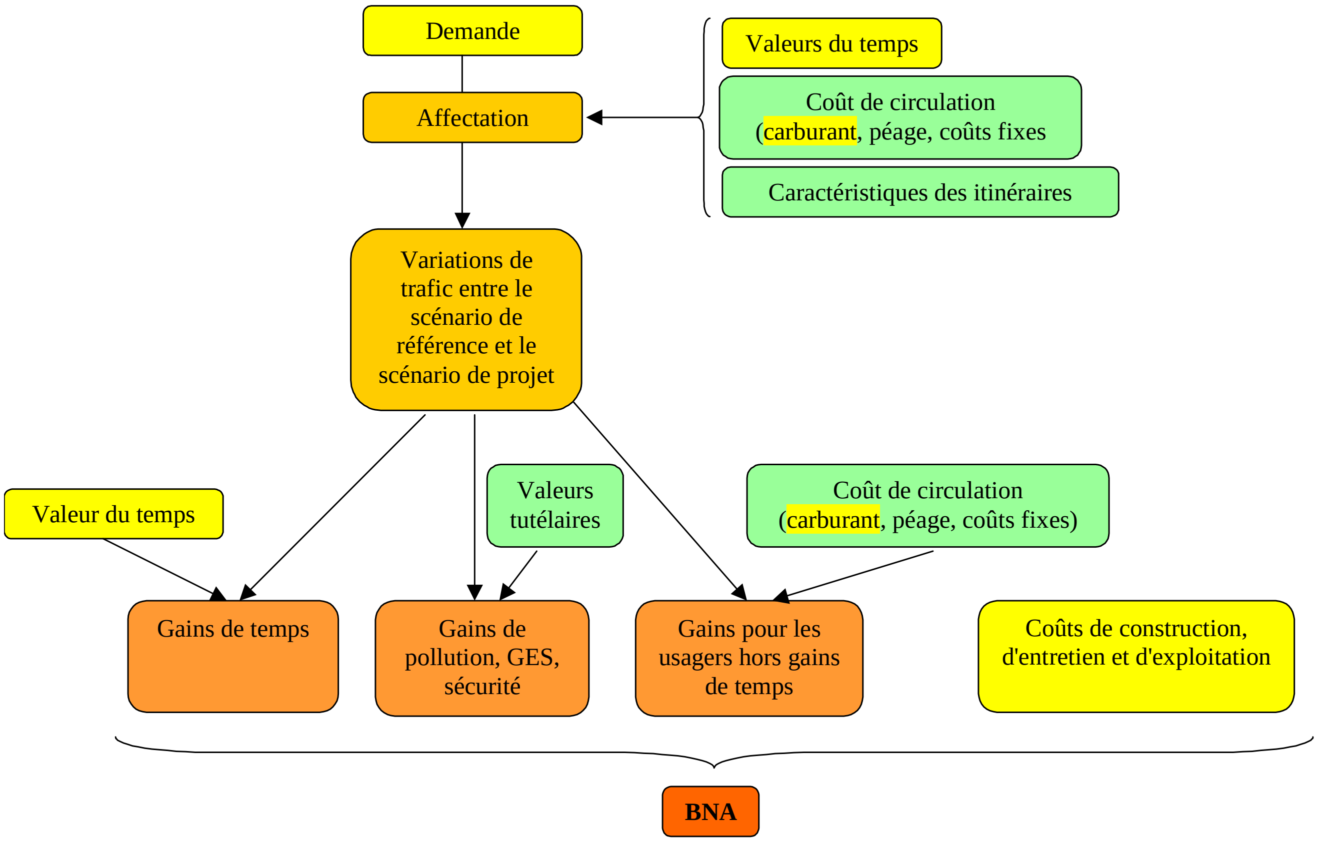
Dit autrement, ces simulations rappellent bien que tout projet de transport est spécifique et mérite une analyse de risque spécifique.

Plus précisément, le lien entre le PIB et les avantages apparaît dans l'illustration numérique ci-après, schématiquement, à deux niveaux : la demande est corrélée au PIB et les avantages unitaires eux-mêmes sont corrélés au PIB selon les élasticités de l'Instruction-Cadre en vigueur.

Les calculs réalisés dans cette section sont réalisés hors congestion, donc l'élasticité des trafics affectés sur chaque arc au PIB n'est pas estimée finement bien que la section précédente ait montré que cette élasticité était variable notamment en cas de congestion. On teste donc dans cette partie uniquement l'élasticité des avantages au PIB en situation non congestionnée et sur deux arcs concurrents.

Cette section a notamment pour objet d'illustrer comment l'élasticité du bilan d'un projet aux paramètres macro-économiques, notamment au PIB, peut dépendre des caractéristiques de ce projet, même hors congestion, notamment la décomposition de ce bilan en ces principaux termes : temps, sécurité, effets externes, coûts de production du service de transports ; et également aux conditions de concurrence plus ou moins exacerbées entre modes ou itinéraires.

Cette partie peut être vue comme une formulation simplifiée des enchaînements entre paramètres décrits dans le graphique ci-dessous.



Présentation du projet « stylisé »

Le projet « stylisé » est de même type que celui pris dans la section précédente. Il comporte une situation de référence caractérisée, schématiquement, par deux itinéraires (qui pourraient également être des modes de transports), caractérisés par des niveaux de services comparables, sur lesquels se répartit un trafic total. L'affectation entre les modes se fait selon le rapport des coûts généralisés, en appliquant une Loi d'Abraham.
Le projet « stylisé » est, comme dans la section précédente, un aménagement sur place qui se caractérise par une amélioration du service (réduction des temps de parcours) sur un des itinéraires, accompagnée d'une variation des coûts externes, et au prix d'un coût de production du service de transports plus élevé, partiellement compensée par un surcroît de prix pour l'usager.

Le bilan coûts-avantages d'un projet de transport « stylisé » est formulé de façon analytique (cf. annexe du rapport Sétra n°1238), ce qui permet de calculer l'élasticité du bilan coûts-avantages au PIB et de faire varier les paramètres de l'évaluation et les caractéristiques du projet, tel qu'évoqué ci-dessus.

Le projet ainsi construit présente un bilan coûts-avantages résumé dans le tableau ci-dessous, détaillé dans l'annexe du rapport Sétra n°1238:

« Projet 0 » : Données générales	
Valeur du temps (€/h)	15
Demande (veh/j)	10000
Entretien VL +carburant (€/veh.km)	0,2
Coefficient de la Loi d'Abraham	10

Données par itinéraire	Avant le projet		Après le projet	
Itinéraire	Itinéraire 1	Itinéraire 2	Itinéraire 1	Itinéraire 2
Géométrie				
Longueur (km)	50	50	idem	idem
Avantages				
Temps de parcours (h)	0,71	0,71	0,42	0,71
Péage (€/veh.km)	0	0	0,08	0
Malus (€/veh.km)	0,023	0,023	0,007	0,023
Externalités (€/veh.km)	0,0225	0,0225	0,0145	0,0225
Coûts				
Coûts d'usage de l'infrastructure (€/veh.km)	0,013	0,013	0,093	0,013
Calculs par itinéraire	Avant le projet		Après le projet	
Itinéraire	Itinéraire 1	Itinéraire 2	Itinéraire 1	Itinéraire 2
Coût généralisé (€)	21,86	21,86	20,60	21,86
Trafic (veh/j)	5000,00	5000,00	6446,57	3553,43

« Projet 0 » : calculs totaux	
Avantages (€/j)	36515
Coûts (€/j)	25786
Avantages - coûts	10729

Les élasticités des principaux paramètres du modèle et du calcul de bilan socio-économique au PIB sont prises égales aux valeurs suivantes :

Elasticités données	
Valeur du temps	0,7
Péage	0
Entretien véhicule + carburant	0
Demande de trafic	1,1
Externalités	1
Coûts d'usage de l'infrastructure	0

Il en ressort une élasticité « composite » du bilan du projet au PIB :

« Projet 0 » : élasticité composite résultante	
Elasticité du projet	**0,84**

Jeu de variantes sur les élasticités des paramètres de l'évaluation aux paramètres macroéconomique

On fait alors varier en premier lieu les élasticités des paramètres au PIB, pour ce « projet 0 » :
Un jeu d'élasticités dans lesquelles les paramètres de prix seraient positivement corrélés au PIB (idée de tension sur les prix en cas de croissance plus élevée et/ou de consentement à payer plus élevé en cas de hausse de revenus) conduit à une élasticité du bilan du projet plus faible :

Elasticités données	
Valeur du temps	0,7
Péage	***0,2***
Entretien véhicules + carburant	***0,2***
Demande de trafic	1,1
Externalités	1
Coûts d'usage de l'infrastructure	***0,2***
« Projet 0 » : élasticité composite résultante	
Elasticité du projet	***0,20***

Une élasticité du trafic au PIB plus faible conduit également à une élasticité du bilan du projet au PIB plus faible :

Elasticités données	
Valeur du temps	0,7
Péage	0,0
Entretien véhicule + carburant	0,0
Demande de trafic	***0,7***
Externalités	1
Coûts d'usage de l'infrastructure	0,0
« Projet 0 » : élasticité composite résultante	
Elasticité du projet	**0,44**

Jeu de variantes sur les paramètres d'évaluation

Le tableau suivant présente les élasticités du projet au PIB, avec des valeurs différentes des principaux paramètres d'évaluation : valeur du temps, paramètre de la loi d'affectation (loi d'Abraham), valeur des coûts externes.

Elasticité composite du bilan du projet	
Valeurs des paramètres	
Projet « V0 », valeurs « Boiteux »	**0,84**
Valeur du temps : -10 %	0,61
Valeur du temps : +10 %	1,10
Coefficient de la Loi d'affectation (Abraham) : 5 (au lieu de 10)	0,20
Coefficient de la Loi d'affectation (Abraham) : 20 (au lieu de 10)	1,57
Coûts externes unitaires : + 50 %	1,02
Coûts externes unitaires : - 50 %	0,60
Coûts d'usage des véhicules : + 20%	0,75
Coûts d'usage des véhicules : - 20%	0,94

Jeu de variantes sur la « typologie du projet ».

Le modèle de projet « stylisé » peut également être utilisé pour tester la sensibilité de l'élasticité au PIB, en faisant varier les caractéristiques du projet.
On utilise, à titre illustratif, les « typologies » suivantes :

Elasticité composite du bilan du projet	
Type de projet	
Projet « V0 »	**0,84**
Projet plus coûteux : + 10% sur les coûts	0,32
Projet non autoroutier : passage de la vitesse de 70 km/h à 90 km/h ; péage = 0	0,21
Projet de type « gestion de trafic » sur route congestionnée : passage de 50 km/h à 70 km/h	0,76
Projet d'amélioration de la qualité de service sur un itinéraire de niveau de service inférieur à son concurrent : + 2 % sur le coût généralisé de l'itinéraire avant projet	0,41
Projet d'amélioration de la qualité de service sur un itinéraire de niveau de service supérieur à son concurrent : - 2 % sur le coût généralisé de l'itinéraire avant projet	1,13

Annexe 2 : prise en compte de l'incertitude liée à l'évaluation de la demande (hors effets PIB)

Cette annexe a pour objet d'illustrer la prise en compte du risque lié spécifiquement à des erreurs d'estimation de la demande de transports, dans l'évaluation des projets. Cette fiche se situe dans le cadre classique dit de Von Neuman Morgenstern, applicable aux risques probabilisés : dans ce cadre, le risque est pris en compte en maximisant l'espérance de l'utilité collective du projet.

Des travaux récents du SETRA (rapport "Prise en compte du risque dans le calcul économique", 2012) ont porté sur le risque illustrant une erreur d'estimation de la richesse nationale (concrètement, le taux de croissance du PIB), qui affecte à son tour la demande de transports, donc la valeur du projet étudié. Ces travaux ont été présentés en exprimant l'espérance de la valeur du projet (i.e. son bénéfice actualisé ou BNA) comme une somme des espérances des avantages algébriques annuels du projet pondérées par un facteur d'actualisation « équivalent » établi en corrigeant le taux d'actualisation sans risque par un terme lié au couplage entre les avantages du projet et la richesse collective. Ces travaux ont, montré à travers un modèle analytique simplifié et des calculs numériques, que le risque portant sur le PIB n'affecte que très faiblement le taux d'actualisation tant que l'on se situe dans des aléas raisonnables pour les variables macro-économiques. Les résultats ont également montré une forte sensibilité aux spécificités des projets.

La présente partie complète l'approche du rapport du SETRA, en tentant d'illustrer le cas où, indépendamment d'un risque portant sur la richesse nationale (en niveau ou en taux de croissance), existe un risque sur la demande de transports, indépendamment du PIB qui s'apparente alors à une « erreur de modélisation » de l'évaluateur. En effet, au-delà de la prise en compte du risque lié au couplage entre le PIB et les avantages, il apparaît nécessaire de se concentrer sur les effets de la variabilité de la croissance des avantages sur le calcul du BNA. Cette variabilité peut avoir une influence non négligeable sur le calcul de l'espérance des avantages et donc du BNA.

Cette partie tente de séparer les deux notions (incertitude sur le PIB, incertitude sur la demande indépendamment du PIB, illustrant une « erreur » de modélisation) de façon simplifiée. Elle présente en premier lieu une modélisation simplifiée permettant de mettre en évidence les effets liés à ces deux notions. Elle présente ensuite quelques applications numériques simples, en distinguant deux types de risques spécifiques à l'estimation de la demande de transports : risque en niveau ou risque en croissance des trafics (ce dernier étant basé sur l'exploitation de séries longues de trafics).

Comme ci-dessus, cette annexe retient une présentation en « taux d'actualisation équivalent ». On rappelle que cette présentation ne saurait signifier qu'il convient de modifier le taux d'actualisation, de façon indifférenciée en fonction des projets, pour prendre en compte le risque dans l'évaluation.

1.1. *Présentation analytique*

Définition du BNA et des taux d'actualisation équivalents

On suppose que les avantages X_t à l'année t d'un projet donné ainsi que le PIB ou la richesse collective C_t à l'année t sont des variables aléatoires. Partant de l'unique hypothèse que les avantages du projet demeurent infinitésimaux en comparaison du PIB, le BNA est défini par l'espérance mathématique suivante :

$$BNA = \sum_{t=0}^{\infty} \left[e^{-\delta t} E\left(X_t u'(C_t)\right)\right] \quad \textbf{(1)}$$

où δ désigne le taux de préférence pure pour le présent et u' l'utilité marginale.

On commence par représenter le risque provenant de la corrélation des avantages d'un projet avec le PIB, ce qui se traduit dans (1) par une dépendance entre les variables apparaissant dans l'espérance. On définit dans ce cadre le taux d'actualisation équivalent α comme le nombre tel que :

$$BNA = \sum_{t=0}^{\infty} \left[e^{-\alpha t} E\left(X_t\right)\right] \quad \textbf{(2)}$$

Il apparaît ainsi que ce taux d'actualisation équivalent α est fortement lié non seulement à l'évolution de l'utilité marginale du PIB mais aussi à la dépendance entre celle-ci et les avantages du projet. Un modèle classiquement utilisé pour exprimer α en fonction de la corrélation entre l'utilité marginale du PIB et les avantages est celui basé sur une évolution du PIB et des avantages, selon des mouvements browniens couplés (voir encadré).

En plus du risque lié au couplage entre avantages et PIB, on se propose maintenant d'introduire des erreurs dans le calcul des avantages. En effet, lors d'une évaluation ex ante d'un projet, il est nécessaire de recourir à des estimations des avantages fondées sur un certain nombre de paramètres éventuellement incertains et sur des modélisations de trafic qui peuvent être entachées d'erreurs (dues par exemple à des erreurs ou incertitudes dans le recueil des données ou des erreurs dans le calage du modèle). On désigne ainsi par Y_t la somme des avantages estimés à l'année t et toujours par X_t les avantages "réels" i.e. supposés corrigés des effets d'erreurs. On définit de nouveau le taux d'actualisation équivalent α' comme celui permettant de corriger les effets des erreurs de modélisation sur le BNA :

$$BNA = \sum_{t=0}^{\infty} \left[e^{-\alpha' t} E\left(Y_t\right)\right] \quad \textbf{(3)}$$

NB : ici aussi, α' est un artifice de calcul, qui permet d'égaliser un calcul "naïf" (sans risque et avec erreurs de modélisation), avec le "vrai" bénéfice actualisé (avec risque et sans erreur de modélisation).

α' s'exprime en fonction de α par égalité de (2) et (3) :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left[e^{-\alpha t} E\left(X_t\right)\right] = \sum_{t=0}^{\infty} \left[e^{-\alpha' t} E\left(Y_t\right)\right] \quad \textbf{(4)}$$

Encadré : calcul de la prime de risque liée à la corrélation du projet au PIB à partir d'une hypothèse de mouvements browniens géométriques couplés

On suppose que l'utilité figurant dans l'expression (1) est isoélastique i.e. que l'utilité marginale u' s'écrit :

$$u'(C_t) = \left(\frac{C_t}{C_0}\right)^{-\gamma} \quad \textbf{(5)}$$

On introduit ensuite les variables r_t^X et r_t^C désignant respectivement les taux de croissance (aléatoires) à l'année t des avantages et du PIB, autrement dit :

$$X_t = X_{t-1} e^{r_t^X} \quad et \quad C_t = C_{t-1} e^{r_t^C} \quad \textbf{(6)}$$

On peut aussi introduire les taux de croissance R_t^X et R_t^C entre 0 et t :

$$X_t = X_0 e^{R_t^X} \quad et \quad C_t = C_0 e^{R_t^C} \quad \textbf{(7)}$$

avec

$$R_t^X = \sum_{\tau=1}^{t} r_\tau^X \quad et \quad R_t^C = \sum_{\tau=1}^{t} r_\tau^C \quad \textbf{(8)}$$

Si l'on se place dans l'hypothèse selon laquelle les couples de taux annuels (r_t^X, r_t^C) sont indépendants, identiquement distribués et suivent une loi normale bivariée (hypothèse de mouvements browniens géométriques couplés), on montre que le taux d'actualisation équivalent s'écrit classiquement (cf. rapport CAS Gollier 2011, rapport SETRA 2012)

$$\alpha = \delta + \gamma\mu_C - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_C^2 + \gamma\beta\sigma_C^2 \quad \textbf{(9)}$$

où μ_C et σ_C sont respectivement la moyenne et l'écart-type du taux annuel de croissance du PIB et le coefficient β vaut

$$\beta = \frac{\mathrm{cov}(r_t^X, r_t^C)}{\mathrm{var}(r_t^C)} = \frac{\mathrm{cov}(r_t^X, r_t^C)}{\sigma_C^2} \quad \textbf{(10)}$$

C'est précisément le dernier terme de (9) qui met en évidence l'effet du couplage existant entre les avantages du projet et le PIB. Ce terme ainsi que l'effet précaution (avant–dernier terme de (9)) demeurent négligeables devant les deux premiers pour des valeurs couramment utilisées pour les différentes variables, par exemple si σ_C est du même ordre de grandeur que μ_C (cf rapport SETRA).

Hypothèse d'une erreur multiplicative indépendante

Pour pouvoir résoudre l'équation (4), il est nécessaire de faire des hypothèses sur les évolutions de $E(X_t)$ et $E(Y_t)$. On suppose ici que les variables Y_t et X_t sont liées de la manière suivante

$$Y_t = X_t \Lambda_t \quad \textbf{(11)}$$

avec la variable d'erreur Λ_t supposée indépendante de X_t. L'injection de (11) dans (3) donne ensuite

$$BNA = \sum_{t=0}^{\infty} \left[e^{-\alpha' t} E(\Lambda_t) E(X_t)\right] \quad \textbf{(12)}$$

Modèle d'erreur en niveau constant

Le premier modèle envisagé correspond au cas où l'espérance de l'erreur est une constante (i.e. est indépendante de t) que l'on note μ_Λ :

$$E(\Lambda_t) = \mu_\Lambda \quad \textbf{(13)}$$

L'équation (4) à résoudre en α' devient donc :

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left[e^{-\alpha t}E(X_t)\right] = \mu_\Lambda \sum_{t=0}^{\infty}\left[e^{-\alpha' t}E(X_t)\right] \quad \textbf{(14)}$$

Pour poursuivre la résolution, il est nécessaire de faire une hypothèse sur $E(X_t)$. On suppose donc que l'espérance des avantages croît avec un taux noté ξ, i.e. :

$$E(X_t) = X_0 e^{\xi t} \quad \textbf{(15)}$$

En injectant (15) dans (14) et en utilisant le résultat classique $\sum_{t=0}^{\infty} q^t = 1/(1-q)$, on obtient la solution suivante :

$$\alpha' = \xi - \ln\left(1 - \mu_\Lambda\left(1 - e^{-\alpha+\xi}\right)\right) \quad \textbf{(16)}$$

En supposant que α et ξ sont infinitésimaux et que μ_Λ demeure borné, il est possible de simplifier (16) par un développement limité :

$$\alpha' = \mu_\Lambda \alpha + (1-\mu_\Lambda)\xi = \alpha + (\mu_\Lambda - 1)(\alpha - \xi) \quad \textbf{(17)}$$

Si l'on note que α doit nécessairement être supérieur à ξ de sorte que les sommes de (14) restent finies, il apparaît dans (17) que, de manière prévisible, l'effet d'une surestimation des avantages ($\mu_\Lambda > 1$) se traduit par une prime de risque liée aux erreurs de modélisation positive ($\alpha' > \alpha$) et l'opposé pour une sous-estimation des avantages. La prime de risque agit donc bien comme une compensation des erreurs de modélisation.

Encadré : cas d'avantages suivant un mouvement brownien géométrique

L'hypothèse retenue en (15) est compatible avec celle d'un mouvement brownien géométrique telle que définie en (6), (7), (8). En effet, si l'on désigne par μ_X et σ_X respectivement la moyenne et l'écart-type du taux annuel (gaussien) de croissance des avantages, en rappelant également que les taux d'une année sur l'autre sont indépendants, un calcul classique donne :

$$E(X_t) = X_0 e^{\left(\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)t} \quad \textbf{(18)}$$

L'expression (18) est ainsi parfaitement compatible avec l'hypothèse (15) en identifiant

$$\xi = \mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2 \quad \textbf{(19)}$$

que l'on peut injecter dans (17).

Modèle d'erreur en taux

On considère à présent un autre modèle régissant l'espérance de l'erreur d'estimation des avantages, intégrant un effet d'évolution dans le temps selon un taux noté λ et une erreur initiale nulle ($\Lambda_0 = 1$) :

$$E(\Lambda_t) = e^{\lambda t} \quad \textbf{(20)}$$

L'équation (4) à résoudre en α' s'écrit cette fois :

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left[e^{-\alpha t}E(X_t)\right]=\sum_{t=0}^{\infty}\left[e^{-(\alpha'-\lambda)t}E(X_t)\right] \quad \textbf{(21)}$$

Contrairement au modèle précédent en niveau constant, le calcul du taux équivalent solution de (21) ne nécessite pas d'hypothèse sur l'expression $E(X_t)$. En effet, α' découle aisément de l'égalité de chaque terme des séries de (21) :

$$\alpha' = \alpha + \lambda \quad \textbf{(22)}$$

Dans ce cas, le taux de croissance de l'erreur se reporte directement sur le taux équivalent. A nouveau, comme prévu, une surestimation des avantages ($\lambda>0$) se traduit par une augmentation du taux équivalent ($\alpha'>\alpha$) tandis qu'une sous-estimation ($\lambda<0$) correspond à une diminution du taux ($\alpha'<\alpha$).

Encadré : cas d'un terme d'erreur suivant un mouvement brownien géométrique

Dans cet encadré, on envisage une erreur commise sur les avantages du projet divergeant selon un taux aléatoire entre *t-1* et *t* et on s'interroge sur la compatibilité d'un tel modèle avec l'hypothèse prise en (20) en fonction des propriétés des taux aléatoires. Autrement dit, on écrit :

$$\ln\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \ln\frac{X_t}{X_{t-1}} + \varepsilon_t \text{ ou encore } \frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{X_t}{X_{t-1}}e^{\varepsilon_t} \quad \textbf{(23)}$$

où ε_t désigne le taux de croissance annuel de l'erreur commise par l'évaluateur. En prenant $Y_0=X_0$, il découle de (23)

$$Y_t = X_t \exp\left(\sum_{u=1}^{t}\varepsilon_u\right) \text{ i.e. } \Lambda_t = \exp\left(\sum_{u=1}^{t}\varepsilon_u\right) \quad \textbf{(24)}$$

Conformément à la définition du mouvement brownien, on suppose maintenant que les taux ε_t sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale de moyenne μ_ε et d'écart-type σ_ε.

$$E(\Lambda_t) = e^{\left(\mu_\varepsilon+\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right)t} \quad \textbf{(25)}$$

La compatibilité entre (25) et (20) est réalisée en choisissant :

$$\lambda = \mu_\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 \quad \textbf{(26)}$$

Le taux d'actualisation équivalent (22) devient alors :

$$\alpha' = \alpha + \mu_\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 \quad \textbf{(27)}$$

Plusieurs commentaires peuvent être faits sur cette solution en rappelant à nouveau qu'une augmentation (resp. diminution) du taux d'actualisation équivalent ie $\alpha'>\alpha$ (resp. $\alpha'<\alpha$) correspond à une compensation dans le coefficient d'actualisation d'une surestimation (resp. sous-estimation) des avantages du projet. D'une part, on peut noter sur (27) que, comme attendu, la prime de risque liée à l'erreur croît avec la moyenne du taux d'erreur μ_ε. Mais, d'autre part, il faut remarquer que la dispersion du taux d'erreur conduit toujours à une surestimation des avantages, c'est-à-dire qu'elle a toujours un effet croissant sur la prime de risque.

Modèle d'erreur mixte en niveau et en taux

On envisage pour finir un modèle combinant à la fois une erreur en niveau et une erreur en taux. Autrement dit, on pose :

$$E(\Lambda_t) = \mu_\Lambda e^{\lambda t} \quad \textbf{(28)}$$

L'équation dont α' est solution est donc :

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left[e^{-\alpha t}E(X_t)\right] = \mu_\Lambda \sum_{t=0}^{\infty}\left[e^{-(\alpha'-\lambda)t}E(X_t)\right] \quad \textbf{(29)}$$

La résolution de (29) est strictement identique à celle de (14). Elle nécessite d'abord une hypothèse sur $E(X_t)$. En reprenant le choix fait en (15), il vient donc

$$\alpha' = \lambda + \xi - \ln\left(1 - \mu_\Lambda\left(1 - e^{-\alpha+\xi}\right)\right) \quad \textbf{(30)}$$

qui donne après linéarisation

$$\alpha' = \alpha + \lambda + (\mu_\Lambda - 1)(\alpha - \xi) \quad \textbf{(31)}$$

Encadré : cas de mouvements browniens géométriques pour les avantages et pour l'erreur

Le cas du mouvement brownien géométrique pour les avantages a déjà été traité précédemment et a conduit aux expressions (18) et (19). La suite de variables aléatoires "erreurs" Λ_t peut s'exprimer en repartant de l'expression (23) mais en choisissant cette fois une erreur intitale $\Lambda_0 \neq 1$. On a alors :

$$\Lambda_t = \Lambda_0 \exp\left(\sum_{u=1}^{t}\varepsilon_u\right) \quad \textbf{(32)}$$

où Λ_0 est indépendant des ε_t supposés comme précédemment indépendants et identiquement distribués selon une loi normale de moyenne μ_ε et d'écart-type σ_ε. L'espérance de (32) donne donc :

$$E(\Lambda_t) = E(\Lambda_0)e^{\left(\mu_\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right)t} \quad \textbf{(33)}$$

dont la compatibilité avec (28) résulte de (26) et $E(\Lambda_0)=\mu_\Lambda$.
Au final, ce modèle aboutit au taux d'actualisation (31) dans lequel ont été injectés (19) et (26) :

$$\alpha' = \alpha + \mu_\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 + (\mu_\Lambda - 1)\left(\alpha - \mu_X - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right) \quad \textbf{(34)}$$

On se propose dans cette section d'illustrer les résultats (9) et (31) à travers quelques applications numériques de manière à estimer les poids respectifs de la prime de risque liée à la dépendance du projet avec le PIB et des erreurs commises dans les étapes de modélisation.

Les valeurs ou intervalles numériques considérés pour les différents paramètres en jeu sont les suivants :

Paramètre	**Représentation**	**Valeur ou intervalle**
δ	Taux de préférence pure pour le présent	1%
γ	Elasticité de l'utilité marginale au PIB	2
μ_C	Dérive du PIB	1.5%
σ_C	Volatilité du PIB	1.5%
β	Cf. ci-dessus	[0 ; 2]
ξ	Taux de croissance des avantages	[0.5% ; 2.5%]
μ_L	Erreur de modélisation (multiplicative)	[0.8 ; 1.2]
λ	Croissance annuelle de l'erreur de modélisation	[-0.3% ; 0.3%]

Le taux d'actualisation équivalent (9) s'écrit comme la somme du taux sans risque $\delta + \gamma\mu_C$, l'effet précaution $-\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_C^2$ et l'effet de la corrélation PIB/projet $\gamma\beta\sigma_C^2$. Avec les valeurs ci-dessus, le taux sans risque vaut **4%**, l'effet précaution vaut **–0.045%** et l'effet projet est compris entre **0** et **0.09%** pour β compris entre 0 et 2. Autrement dit, comme mentionné dans le rapport SETRA n°1238, les termes de risque liés à la volatilité du PIB et aux corrélations avec le projet sont négligeables avec les valeurs numériques choisies.

Examinons ensuite la contribution des erreurs d'estimation des avantages sur le taux d'actualisation équivalent (31) i.e. la différence $\alpha' - \alpha = \lambda + (\mu_\Lambda - 1)(\alpha - \xi)$ avec α peu différent du taux sans risque (soit 4% selon le commentaire du précédent paragraphe). Les tableaux (1) et (2) présentent respectivement les résultats de calcul de α' et de α'-α en fonction de différentes valeurs numériques des paramètres.

	μ_Λ		0,8			1			1,2	
β	ξ \ λ	-0,3%	0,0%	0,3%	-0,3%	0,0%	0,3%	-0,3%	0,0%	0,3%
0	0,5%	2,96%	3,26%	3,56%	3,66%	3,96%	4,26%	4,35%	4,65%	4,95%
	1,5%	3,16%	3,46%	3,76%	3,66%	3,96%	4,26%	4,15%	4,45%	4,75%
	2,5%	3,36%	3,66%	3,96%	3,66%	3,96%	4,26%	3,95%	4,25%	4,55%
1	0,5%	3,00%	3,30%	3,60%	3,70%	4,00%	4,30%	4,40%	4,70%	5,00%
	1,5%	3,20%	3,50%	3,80%	3,70%	4,00%	4,30%	4,20%	4,50%	4,80%
	2,5%	3,40%	3,70%	4,00%	3,70%	4,00%	4,30%	4,00%	4,30%	4,60%
2	0,5%	3,04%	3,34%	3,64%	3,75%	4,05%	4,35%	4,45%	4,75%	5,05%
	1,5%	3,24%	3,54%	3,84%	3,75%	4,05%	4,35%	4,25%	4,55%	4,85%
	2,5%	3,44%	3,74%	4,04%	3,75%	4,05%	4,35%	4,05%	4,35%	4,65%

Tableau 1 : taux d'actualisation équivalent α'

μ_Λ		0,8			1			1,2	

β	λ / ξ	-0,3%	0,0%	0,3%	-0,3%	0,0%	0,3%	-0,3%	0,0%	0,3%
0	0,5%	-0,99%	-0,69%	-0,39%	-0,30%	0,00%	0,30%	0,39%	0,69%	0,99%
	1,5%	-0,79%	-0,49%	-0,19%	-0,30%	0,00%	0,30%	0,19%	0,49%	0,79%
	2,5%	-0,59%	-0,29%	0,01%	-0,30%	0,00%	0,30%	-0,01%	0,29%	0,59%
1	0,5%	-1,00%	-0,70%	-0,40%	-0,30%	0,00%	0,30%	0,40%	0,70%	1,00%
	1,5%	-0,80%	-0,50%	-0,20%	-0,30%	0,00%	0,30%	0,20%	0,50%	0,80%
	2,5%	-0,60%	-0,30%	0,00%	-0,30%	0,00%	0,30%	0,00%	0,30%	0,60%
2	0,5%	-1,01%	-0,71%	-0,41%	-0,30%	0,00%	0,30%	0,41%	0,71%	1,01%
	1,5%	-0,81%	-0,51%	-0,21%	-0,30%	0,00%	0,30%	0,21%	0,51%	0,81%
	2,5%	-0,61%	-0,31%	-0,01%	-0,30%	0,00%	0,30%	0,01%	0,31%	0,61%

Tableau 2 : contribution des erreurs de modélisation au taux équivalent (α' - α)

On note que le taux d'actualisation équivalent α' varie d'environ ± 1% autour du taux sans risque de 4% selon que les avantages sont surestimés ou sous-estimés.

(NB : on rappelle que le taux d'actualisation équivalent est ici un artifice de calcul pour ramener "au dénominateur" les calculs d'espérance actualisée des avantages, qui se calcule normalement "au numérateur").

Cette illustration numérique met en évidence que le taux d'actualisation équivalent peut être plus sensible aux erreurs d'estimation des avantages qu'au risque lié aux corrélations du PIB et du projet. Cette conclusion est bien sûr dépendante des valeurs choisies pour les différents paramètres de la formule.

Cette illustration numérique conforte également l'idée selon laquelle l'enjeu de la prise en compte du risque dans l'évaluation des projets se situe au niveau du projet considéré, avec ses spécificités (et son modèle sous-jacent). Une approche générique consistant à corriger le taux d'actualisation d'un facteur constant (approche du "β" commun à tous les projets de transports), gommerait toutes les spécificités du projet et irait probablement à l'encontre de l'objectif de bien discriminer les projets (y compris au besoin en tenant compte de la qualité de leurs modèles sous-jacents).

Les erreurs de modélisation sont principalement dues aux problèmes de qualité des données. Les différentes sources de données d'offre (caractéristiques des réseaux des différents modes) et de demande (enquêtes de circulation, comptages, enquêtes ménage) à la base des modèles peuvent être, selon les moyens affectés à l'évaluation de chaque projet, incomplètes ou obsolètes. Le problème de qualité et de complétude des données peut conduire le modélisateur à retenir un modèle simple et à reconstituer les données manquantes "à la main". L'enjeu réside donc plutôt dans les investissements à consentir pour le développement des modèles et de leurs données de calage, que dans un "lissage" des spécificités des projets et des modèles par un taux d'actualisation forfaitairement revu à la hausse pour tous les projets.