Discussion sur l'actualisation: Un arrière-plan analytique simplifié
C. Gollier et R. Guesnerie
Juillet 2017

L'objectif de cette note est de présenter un arrière-plan analytique simplifié pour fournir un cadre commun à la discussion du groupe d'experts sur le calcul socio-économique.

Nous partons de la formule qui décrit dans un monde à un bien, l'accroissement de bien-être social associé à une suite de modifications marginales B_t:

$$\Delta W = \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta t} Eu(C_t + B_t) - \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta t} Eu(C_t) = \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta t} E[u'(C_t)B_t]. \tag{1}$$

On suppose dans la suite que $u'(C) = C^{-\gamma}$, $C_0 = 1$, et que C_t suit un processus Brownien géométrique de drift μ et de volatilité σ. Cela implique que $\log(C_t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Premier cas: Projet sans risque, B_t non corrélé à C_t

Dans ce cas, on obtient que[1] $Eu'(C_t) = E\exp(-\gamma C_t) = \exp(-\gamma\mu t + 0.5\gamma^2\sigma^2 t)$. Cela implique que ΔW peut se réérire comme une somme des cash-flows espérés actualisés au taux ρ_t, avec

$$\rho_t = \delta + \gamma\mu - 0.5\gamma^2\sigma^2 = r_f. \tag{2}$$

C'est la formule de Ramsey étendue.

Deuxième cas: Projet risqué, $B_t = C_t^{b_t}$

Si B_t est la valeur du bien généré par l'investissement, on peut interpréter b_t comme l'élasticité-revenu de la demande pour ce bien. Cette formule intègre donc un effet "prix relatif". Réécrivons (1) comme

$$\Delta W = \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho_t t} EB_t, \tag{3}$$

avec

$$e^{-\rho_t t} = \frac{E[u'(C_t)B_t]}{EB_t}. \tag{4}$$

ΔW est la somme des cash-flows espérés actualisés à un taux ajusté pour le risque. On utilise deux fois la formule de la note 1 pour calculer les deux espérances de la formule (4) pour obtenir que

$$\rho_t = r^f + b_t\pi. \tag{5}$$

[1] On utilise le résultat bien connu que $E(\exp kc) = \exp(k\mu + 0.5k^2\sigma^2)$, si c est normale de moyenne μ et de variance σ^2.

oú r^f est le taux d'actualisation sans risque défini par (2) et π est la prime de risque systématique définie comme suit:

$$\pi = \gamma\sigma^2. \tag{6}$$

Mais il faut noter que dans la formule (4), on actualise un B_t qui croît exponentiellement:

$$EB_t = B_0 \exp\left(b_t\mu + 0.5b_t^2\sigma^2\right)t. \tag{7}$$

On retrouve ici un effet prix relatif, corrigé pour le risque. Ceci donne une VAN comme suit:

$$\Delta W = B_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \exp\left(-\delta - (\gamma - b_t)\mu + 0.5(\gamma^2 + b_t^2)\sigma^2 - b_t\gamma\sigma^2\right)t. \tag{8}$$

Dans le cas déterministe, on obtient le taux d'actualisation corrigé pour l'évolution des valeurs relatives $\rho_t = \delta + (\gamma - b_t)\mu$. Si b_t est plus grand que γ, une croissance plus forte que prévue valorise le capital naturel plus fortement qu'elle n'accroît le taux d'actualisation, ce qui a pour conséquence d'augmenter la valeur présente du projet.

On peut aussi s'interroger sur: :

- la prise en compte d'incertitudes plus profondes, et de queues épaisses de distribution. Dans les rapports précédents (Gollier et Quinet), la plausibilité d'événements extrêmes sont pris en compte, qui réduisent le taux r^f et qui augmentent la prime de risque π par rapport aux formules gaussiennes ci-dessus. Voir aussi Gollier (2016) et l'abondante littérature récente sur prix des actifs et distribution non-Gaussienne. Cela pourrait être utile pour recalibrer le modèle.
- évaluation de b_t dans des contextes divers ?

Troisième cas: Deux biens $(x_t, C_t) \to (x_t + \Delta_{xt}, C_t + \Delta_{Ct})$

On se limite ici au cas déterministe, avec $x_t = 1$, $C_t = \exp(\mu t)$ et $\mu > 0$. On suppose aussi la spécification suivante: $u(x_t, C_t) = \frac{1}{1-\gamma}Y_t^{1-\gamma}$ et $Y_t = [x_t^{1-\beta} + {C_t}^{1-\beta}]^{1/(1-\beta)}$. Notons que dans ce cas, la propension à payer pour x est égale à C_t^β, ce qui explicite le lien avec le deuxième cas, avec $b_t = \beta$. L'équation (1) se réécrit comme

$$\begin{aligned} \Delta W &= p_0 \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta t}\frac{u_x(x_t, C_t)}{u_x(x_0, C_0)}\Delta_{xt} + \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\delta t}\frac{u_C(x_t, C_t)}{u_C(x_0, C_0)}\Delta_{Ct} &(9)\\ &= p_0 \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho_{xt}t}\Delta_{xt} + \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho_{Ct}t}\Delta_{Ct}, &(10)\end{aligned}$$

oú $p_0 = u_x(x_0, C_0)/u_C(x_0, C_0)$ est la valeur du bien x aujourd'hui. L'équation (10) montre qu'on a donc deux taux d'actualisation, un pour chaque bien. Le taux associé à x est ajusté pour l'évolution des prix relatifs.

Supposons que β est plus petit que 1. Dans ce cas, le bien composite Y_t croit asymptotiquement au taux μ. Il est alors facile de vérifier que

$$\lim_{t\to+\infty} \rho_{Ct} = \delta + \gamma\mu \qquad \lim_{t\to+\infty} \rho_{xt} = \delta + (\gamma - \beta)\mu \tag{11}$$

Ce qui est conforme avec Guesnerie (2004, page 376), qui montre aussi qu'elle reste vraie quand on ajoute une croissance faible de x (page 378).

Supposons alternativement que β est plus grand que 1. Dans ce cas, le bien composite Y_t converge asymptotiquement vers une constante, cad que sont taux de croissance asymptotique est nul. Comme le montre Guesnerie (2004), ceci transforme radicalement les taux d'actualisation de long terme, avec notamment $\rho_{x\infty} = \delta$.

Gollier (2010) résoud analytiquement le cas où x_t et C_t suivent des Browniens géometriques dans le cas limite Cobb-Douglas ($\beta \to$). Il analyse aussi numériquement le cas $\beta \neq 1$ lorsque C_t suit un Brownien gémoetrique et $x_t = C_t^\beta$. Reste à mieux comprendre pourquoi les deux cas $\beta <> 1$ génèrent des résultats si différents, et à en extraire les implications de politique environnementale.

Bibliographie

Gollier, C., (2010), Ecological discounting, *Journal of Economic Theory*, 145, 812-829.

Gollier, C., (2016), Evaluation of long-dated assets : The role of parameter uncertainty, *Journal of Monetary Economics* 84, 66-83.

Guesnerie, R., (2004), Calcul économique et développement durable, *Revue Economique* 55, 363—382.

Guéant, O., R. Guesnerie et J.-M. Lasry, (2012), Ecological intuition versus economic "reason", *Journal of Public Economic Theory*, 14, 245-272.