Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

PREMIER MINISTRE

Commissariat général
à la stratégie
et à la prospective

Département
Développement durable

Juin 2013

RAPPORTS
& DOCUMENTS

COFP et rareté des fonds publics

Contribution

Joël MAURICE
Quentin ROQUIGNY

Tome 2

Rapport
« L'évaluation socio-économique en période de transition »

Groupe de travail
présidé par Émile Quinet

Sommaire

Note
sur les notions de coût d'opportunité des fonds publics (COFP)
et de prix fictif de rareté des fonds publics (PFRFP)

Joël MAURICE et Quentin ROQUIGNY

Annexe 1 : Instruction cadre relative aux méthodes d'évaluation économique des grands projets d'infrastructures de transport (2005 (document disponible sur internet : http://temis.documentation.equipement.gouv.fr/documents/temis/14849/14849_2005.pdf)

Annexe 2 : Regard analytique sur les distorsions résultant d'un financement du « bien public » par des prélèvements obligatoires non forfaitaires

1 Introduction

Les projets d'infrastructures sont souvent tributaires de financements publics, eux-mêmes financés tôt ou tard par des prélèvements obligatoires. En effet, même dans le cas de projets dans lesquels la dépense publique est financée par l'emprunt public, la taxation n'est que différée : elle n'intervient pas dès le lancement du projet mais dans les périodes suivantes, afin de rembourser la dette[1].

Ces prélèvements obligatoires peuvent prendre des formes diverses : taxation des revenus du travail ou du capital, taxe générale sur la consommation, taxes spécifiques sur certains biens et services, ou encore prélèvements ou subventions forfaitaires (i.e. non assises sur une activité économique), etc.

Les financements publics constituent un vaste champ d'investigation de la théorie économique. Citons ici, sans prétendre à l'exhaustivité, trois apports importants. Les travaux fondateurs de Richard Musgrave[2] identifient trois motifs principaux de l'intervention publique : l'allocation des ressources pour remédier aux imperfections du marché ; la redistribution des revenus et des patrimoines ; la régulation macroéconomique. La recherche de l'optimum collectif conduit à un principe simple de financement des biens publics purs, mis en évidence notamment par P. Samuelson[3]. Dus à K. Arrow et G. Debreu, les « théorèmes du bien-être » – plus

(1) On montre que – sauf rationnement des fonds publics pour d'autres impératifs – l'intérêt de cette pratique ne dépend que des valeurs relatives du taux d'intérêt de l'emprunt et du taux d'actualisation public.
(2) Musgrave et Brewer Richman (1973) « *Public Finance in Theory and Practice* ».
Exemples d'imperfections du marché : existence de biens publics purs (défense nationale, sécurité publique, justice…) ; existence d'externalités positives (culture, recherche, assurances sociales,…) ou négatives (congestion, pollutions, effet de serre…) ; concurrence imparfaite ; rendements croissants ; etc.
Exemples de redistribution : impôt sur le revenu, prestations sociales, égalité des chances, …
Exemple de régulation macro-économique : rôle contra-cyclique des dépenses et des recettes publiques.
(3) Selon ce principe, à l'optimum social, le taux marginal de transformation du bien public par rapport au bien privatif doit être égal à la somme du taux marginal de substitution de tous les citoyens entre le bien public et le bien privatif (« consentement à payer »). Si cette règle était respectée, le prélèvement public n'introduirait aucune « distorsion » socio-économique. Rappel des concepts :

précisément le second – montrent que pour tout « optimum social au sens de Pareto[1] » il existe un système de prix et de transferts forfaitaires qui permettraient de décentraliser cet optimum sous la forme d'un marché supposé concurrentiel ; entre tous les optima de Pareto, un large choix de répartition s'offre ainsi à la collectivité des citoyens.

Le recours à des financements publics pour concourir à la recherche d'un optimum socioéconomique ne manque donc pas de solides justifications.

<u>Notion de coût d'opportunité des fonds publics (COFP)</u>

Cependant, la mise en œuvre de ces enseignements de la théorie économique ne va pas sans difficultés.

Une première difficulté réside dans le fait que seuls des prélèvements forfaitaires permettraient d'atteindre l'optimum socio-économique susmentionné. Or, les exemples de prélèvements réellement forfaitaires sont rares[2]. La plupart des prélèvements obligatoires modifient en fait les prix d'achat des biens ou le salaire horaire net disponible, ce qui déplace la façon dont les agents économiques déterminent tant le volume et la composition de leur panier de consommation que le partage auquel ils aspirent entre travail et loisir. Ces distorsions induisent en tant que telles une certaine perte de satisfaction, dont toute la question est de avoir si elle est compensée (voire au-delà) par l'accès aux biens publics que les prélèvements obligatoires permettent de financer. Un tel arbitrage suppose que l'on sache estimer correctement perte de satisfaction d'un coté, meilleur accès au bien public de l'autre.

Une deuxième difficulté résulte de l'asymétrie d'information, qui empêche la puissance publique de connaître parfaitement les caractéristiques des citoyens et de leurs préférences, mais aussi les conditions de production des biens privatifs et même des biens publics.

Enfin, une limite supplémentaire réside dans le fait que les instruments de la puissance publique, malgré leur sophistication et même leur prolifération, sont en nombre très inférieur à celui des interactions socio-économiques, si bien que, même si certains prélèvements obligatoires ou transferts publics sont dimensionnés de façon « optimale» vis-à-vis d'un des agents économiques, vis-à-vis de quasiment tous les autres ils sont inévitablement peu ou prou « désajustés ».

Au total, les prélèvements publics comportent une certaine dose d'effets distorsifs, désignés sous le terme de « coût d'opportunité des fonds publics » (COFP). Il s'agit d'estimer ce coût, qu'il convient de prendre en compte dans le calcul économique : pour qu'un projet soit justifié du point de vue de l'intérêt général, il importe ainsi de

---

- taux marginal de transformation : à facteurs de production donnés, de combien d'unités faudrait-il réduire la production du bien privatif pour pouvoir produire une unité supplémentaire de bien public ;
- taux marginal de substitution : à satisfaction inchangée, combien d'unités du bien privatifs un consommateur donné accepterait –t-il de ne pas consommer pour avoir accès à une unité supplémentaire de bien public.

(1) Rappel du concept : il y a optimum de Pareto s'il est impossible d'améliorer la satisfaction d'un « consommateur » sans détériorer la satisfaction d'au moins un autre « consommateur ».

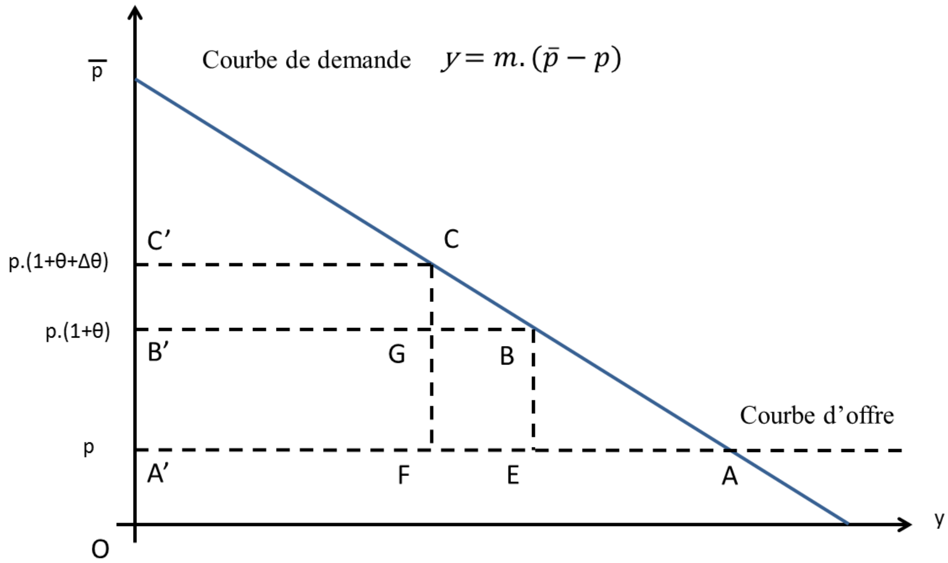
(2) On peut citer l'allocation de rentrée scolaire, la prime à la cuve de fuel ou la redevance télévision, mais en fait ces différents forfaits sont peu ou prou conditionnels.

vérifier que le bénéfice socio-économique est positif, c'est-à-dire que les avantages socio-économiques actualisés l'emportent sur les coûts actualisées, les fonds publics qui interviennent dans ce bilan étant comptés non à leur coût nominal, mais selon le COFP.

Encadré 1

Cas d'une taxation du bien privatif au taux θ
COFP moyen et COFP marginal

Figure 1 – Taxation du bien privatif au taux θ, COFP moyen et COFP marginal



Source : Auteurs

La figure 1 ci-dessous est familière aux habitués des études de surplus[1], par exemple appliquées à un investissement de transports. On la transpose ici au cas d'un consommateur, consommant un bien privatif.

En abscisses se trouve la quantité y de bien privatif, en ordonnées le prix de ce bien. Le prix hors taxe du bien est p : il est supposé exogène et indépendant des quantités. La droite descendante est celle de la demande du bien privatif par le consommateur. En l'absence de taxes, l'équilibre entre l'offre et la demande dudit bien est représenté par le point A.

Supposons que la puissance publique prélève une taxe au taux θ sur ce bien, dont le prix de vente est alors $p.(1+\theta)$. L'image de la quantité acquise se déplace de A en B : le consommateur réduit sa consommation de bien privatif, ce qui entraîne pour son niveau de satisfaction monétarisée une perte, mesurée par l'aire $A'B'BA$. De son côté, la recette publique provenant de la taxe sur le bien privatif est mesurée par l'aire $A'B'BE$. Par définition, le coût d'opportunité moyen des fonds public (COFP) est :

(1) Le surplus « à la Dupuit » ainsi représenté et calculé n'est rigoureux que si la fonction d'utilité du consommateur est « additivement séparable » (voir par exemple J-J Laffont 1982) « *Cours de théorie microéconomique* », Economica, volume 1, page 115.

COFP moyen = $aire\ A'B'BA / aire\ A'B'BE = 1 + \lambda_{moy}$

Il faut bien entendu tenir compte du fait que la raison d'être de cette recette publique est de financer (exactement) un bien public, qui contribue par ailleurs à la satisfaction du même consommateur, mais qui n'est pas représentée sur la figure.

Supposons maintenant que la puissance publique se demande s'il est justifié – du point de vue de l'intérêt général – d'augmenter le taux de prélèvement de $\Delta\theta$.

D'une part, l'image de la quantité de bien privatif acquise par le consommateur passerait de B en C ; sa satisfaction diminuerait de l'aire $B'C'CB$. La variation marginale de la recette publique serait égale à : (aire $B'C'CG$ – aire $BEFG$) ; elle est positive si et seulement si la première aire[1] est supérieure à la deuxième[2] (voir Nota ci-dessous).

Le COFP marginal est : COFP marginal =
$aire\ B'C'CB / (aire\ B'C'CG - aire\ BEFG) = 1 + \lambda$

D'autre part, la variation marginale (supposée positive) des recettes publiques est censée être utilisée pour financer exactement une augmentation marginale de la taille du bien public (par exemple sous la forme d'un projet marginal additionnel), entraînant ainsi une augmentation marginale de satisfaction monétarisée, qui est supposée calculable, mais n'est pas représentée sur la figure.

L'augmentation $\Delta\theta$ est justifiée tant que l'augmentation marginale de la satisfaction monétarisée est supérieure ou égale à la perte marginale de satisfaction monétarisée. Autrement dit, tant que chaque euro public investi augmente la satisfaction monétarisée marginale d'un montant supérieur ou égal à $(1+\lambda)$ €.

Nota : La recette publique passe donc par un maximum lorsque l'aire $BEFG$ devient égale à l'aire $B'C'CG$. On montre que cela se produit pour $\theta^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{p} - p}{p}$. Il serait « contreproductif » d'augmenter le taux de prélèvement au-dessus de cette valeur.
On montre que, lorsque θ croît de 0 à θ^*, alors λ croît de 0 à $+\infty$.

La prise en compte du COFP réduit le bénéfice socio-économique des projets et ceux d'entre eux pour lequel ce critère devient négatif, n'étant plus justifiés au regard de l'intérêt général, doivent être abandonnés.

A contrario, sans contrainte sur la disponibilité des fonds publics, il convient en principe de réaliser tout projet dont le bénéfice socio-économique – une fois pris en compte le COFP – est positif.

Notion de prix fictif de rareté des fonds publics (PFRFP)

Pourtant, il se peut que, dans certaines circonstances, il se révèle impossible de mobiliser le montant cumulé de tous les fonds publics correspondant à la liste

---

(1) La première aire, $B'C'CG$, mesure l'augmentation due à l'effet direct de la hausse du taux de prélèvement.
(2) La deuxième aire, $BEFG$, mesure la diminution de l'assiette (les quantités consommées), due à l'augmentation du prix de vente résultats de la hausse du taux de taxe.

complète de ces projets socio-économiquement rentables. Un rationnement discrétionnaire des fonds publics peut en effet s'imposer dans diverses situations macroéconomiques. Tel serait le cas par exemple dans les périodes de surchauffe du cycle conjoncturel. Mais cela peut aussi résulter d'une politique de consolidation budgétaire, comme celle qui est menée actuellement au sein de la zone euro, au titre du traité pour la stabilité, la coopération et la gouvernance (TSCG). Aux termes de ce traité, la France – comme chacun des autres États membres – s'engage à converger rapidement vers l'équilibre structurel du budget des administrations publiques et à réduire d'un vingtième chaque année son endettement public dépassant le taux de 60 % du PIB. A ce titre, un « Programme de stabilité » définit un objectif de résorption progressive du déficit public[1]. Ce programme soumet l'enveloppe des fonds publics disponibles à une contrainte limitative, évolutive d'une année à l'autre. Le rationnement annuel portant globalement sur l'ensemble des dépenses publiques peut – le cas échéant – être réparti en enveloppes particulières, ventilées entre les diverses administrations publiques (État, collectivités territoriales, sécurité sociale) ou les divers secteurs (transports, énergie, logement, etc.).

La question qui se pose est alors la suivante : au sein de la liste précitée des projets en principe utiles du point de vue socio-économique, comment sélectionner et programmer au mieux ceux qu'il convient de financer, dans la limite de la chronique des enveloppes annuelles des fonds publics disponibles ?

Ce problème peut, en principe, être résolu en appliquant les méthodes d'optimisation sous contrainte, développées par Lagrange et étendues par Kuhn et Tucker. Il s'agit de maximiser le bien être engendré par la réalisation des projets créateurs de valeur sous respect de chaque contrainte annuelle des fonds publics disponibles. Ces méthodes fournissent une chronique de « prix fictif de rareté des fonds publics » (PFRFP)[2], qu'il est possible d'utiliser pour calculer le « bénéfice socio-économique fictif » de chaque projet de la liste. L'optimum social sous contrainte budgétaire conduit alors à retenir les projets de la liste ou à les abandonner selon que leur bénéfice socio-économique fictif est positif ou négatif. En recourant à une méthode instrumentale de linéarisation, il est possible de départager les projets à l'aide d'un algorithme[3].

Dans cette note, nous consacrerons la partie 1 au « coût d'opportunité des fonds publics (COFP) et la partie 2 au « prix fictif de rareté des fonds publics (PFRFP) ». Nous reviendrons en conclusion sur l'articulation entre ces deux notions.

(1) L'effort peut porter soit sur la réduction des dépenses publiques, soit sur l'augmentation des recettes publiques, soit sur une combinaison des deux.
(2) Ce sont les multiplicateurs de Lagrange, à raison d'un multiplicateur pour chaque enveloppe annuelle de fonds publics.
(3) Algorithme « du *simplexe* » dû à Dantzig et alii.

2. Coût d'opportunité des fonds publics (COFP)

2.1 Définition du « coût d'opportunité des fonds publics » ou « coût marginal social des fonds publics »

En matière de coût d'opportunité des fonds publics, le rapport du Commissariat général du Plan présidé par D. Lebègue (2005)[1], puis l'instruction cadre de Robien[2] telle que révisée en 2005 formulent les préconisations suivantes :

> *« Lorsque les avantages procurés par les investissements publics ne peuvent être rémunérés par des recettes, ils bénéficient généralement de subventions publiques, ressources dont le prélèvement par l'impôt est coûteux du point de vue de l'efficacité socio-économique. Cela conduit à effectuer le calcul des critères de rentabilité socio-économiques (tels que définis au chapitre V de l'instruction cadre du 25 mars 2004) en prenant en compte un « coût d'opportunité des fonds publics » sous forme d'un coefficient multiplicateur, fixé à 1,3 conformément à certaines propositions du Commissariat général du Plan, qui s'applique à tout euro public dépensé dans un projet et représente le prix fictif d'une unité de fonds public ».* (Instruction cadre de Robien (2005), Annexe 3, partie 3, p.58).

Afin de partager une définition claire, nous retiendrons (voir encadré 1) ici que lorsque l'État prélève 1 € supplémentaire, il en résulte sur le bien-être socio-économique un impact dont l'évaluation monétarisée est égale à $(1+\lambda)$ €, « $1+\lambda$ » étant ce que nous appellerons **le coût d'opportunité des fonds publics**. Au sein de cette expression, le terme « 1 » représente le simple transfert de 1 € du privé (entreprises ou ménages) vers le public, tandis que le terme « λ » représente ce que les économistes appellent la « perte sèche » ou la « charge excédentaire » par unité d'argent prélevée.

Le « coût d'opportunité des fonds publics (COFP) » est aussi appelé **« coût marginal social des fonds publics »**[3], l'adjectif « marginal » étant souvent omis.

Notons que, par définition d'un coût marginal, le COFP ne reflète que le coût d'une réforme fiscale *à la marge* à partir d'une situation de référence donnée, et pas le coût social de *l'ensemble* de la politique fiscale[4]. À ce titre, il y a donc en théorie autant de COFP que de modifications fiscales marginales.

(1) Commissariat général du Plan (2005), « *Révision du taux d'actualisation des investissements publics* », rapport présidé par D. Lebègue.
(2) Instruction cadre de Robien (2005) « *relative aux méthodes d'évaluation économique des grands projets d'infrastructure de transports* », Ministère des transports.
(3) Les articles académiques ou assimilés utilisent l'un ou l'autre de ces deux termes sans distinction.
(4) Sauf si les coûts de la distorsion économique sont linéaires.

2.2 Théorie sous-jacente au coût d'opportunité des fonds publics : un aperçu

La théorie du coût d'opportunité des fonds public revêt une certaine complexité. On s'en tiendra ici à la présentation d'une approche très simplifiée, permettant de mettre en évidence quelques aspects essentiels du problème (des justifications techniques sont développées en Annexe 2).

Première approche : équilibre partiel

Commençons par considérer le cas d'école d'une société extrêmement simplifiée qui serait constituée de membres tous identiques, dont l'un quelconque jouerait le rôle d'« agent représentatif ». Cet agent représentatif éprouve un certain degré de satisfaction (ou d'« utilité »), fonction croissante de trois variables :

- sa consommation d'un panier de biens privatifs, appelé « bien privatif composite » ;
- son accès à un certain niveau de « bien public » ;
- enfin son temps de « loisir », c'est-à-dire la partie de son temps calendaire qu'il ne consacre pas au travail[1].

Cette fonction d'utilité est supposée à élasticités de substitution constantes, inférieures à 1. L'agent représentatif est censé maximiser sa satisfaction sous la contrainte de non dépassement de son revenu monétaire. Cette contrainte exprime que l'agent représentatif utilise la totalité[2] de ses revenus (salariaux et non-salariaux[3]) pour acquérir le bien privatif composite ou pour contribuer au financement du bien public. Le coût de ce bien public est censé exactement couvert par la somme des contributions de tous les agents membres de la société.

On simplifie encore en adoptant une approche en termes d'équilibre partiel. On suppose ainsi exogènes le prix de production du bien privatif composite, le coût unitaire de production du bien public, le revenu non-salarial, le salaire horaire *superbrut*[4]. Obtenu en multipliant ce salaire *superbrut* par la durée du travail, le revenu salarial *superbrut* calendaire est en revanche endogène.

(1) Dans cette approche, le travail est assimilable à un effort. Il est fait abstraction de la désirabilité du travail en tant, notamment, que valorisation de la personne exerçant sa créativité et que facteur d'intégration à la vie sociale.
(2) Dans cette représentation schématique on fait donc abstraction de l'épargne. Dans ces conditions, l'agent utilise tout son revenu pour consommer ; en effet, si une partie de son revenu n'était pas utilisé, il aurait toujours intérêt à le dépenser afin d'augmenter encore davantage son utilité.
(3) Il ne s'agit pas seulement ici des revenus de remplacement ou « salaire de réservation » mais de tous les revenus non-salariaux, y compris ceux du patrimoine.
(4) C'est-à-dire le salaire horaire tel que payé par l'employeur, y compris tous les prélèvements obligatoires assis sur le salaire horaire, tels que notamment les cotisations « employeur » et cotisations « salarié ».

Optimum de premier rang

On imagine alors que l'agent représentatif puisse exprimer son « consentement à payer le bien public », par exemple en répondant à un commissaire priseur[1] qui lui poserait la question suivante : « *si on vous proposait de mettre en place tel ou tel niveau de bien public, quelle contribution seriez vous prêt à payer pour chacun de ces niveaux ?*[2] ».
En dehors de cette contribution consentie, il n'y aurait pas de prélèvement obligatoire. Le salaire horaire disponible serait effectivement égal au salaire horaire *superbrut*. Le prix d'achat du bien composite serait égal à son prix de production. Ce processus idéalisé aboutirait alors à un arbitrage explicite entre bien composite, bien public et loisir, portant la satisfaction de l'agent représentatif à son plus haut niveau compatible avec sa contrainte de revenu. Cette situation est appelée « optimum de premier rang ».

Cet optimum possède un certain nombre de propriétés. La satisfaction qu'il permet d'atteindre croît si le prix du bien privatif composite décroît, si le coût unitaire du bien public décroît, si le revenu non-salarial croît. Elle croît[3] aussi avec le salaire horaire *superbrut,* mais seulement si celui-ci est supérieur à un plancher ; ce plancher croît lui-même avec le revenu non-salarial (il est nul si le revenu non-salarial est nul) ; au-dessous de ce plancher, le temps de travail de l'agent représentatif est nul : selon l'expression consacrée par les économistes, « il ne participe pas au marché du travail ». La valeur des revenus non-salariaux comparée au salaire horaire *superbrut* joue ainsi un rôle essentiel dans la caractérisation de l'optimum de premier rang[4].

Système fiscal et « optimum partiel spécifique[5] »

Cependant ce processus d'expression du « consentement à payer le bien public » est assez loin de la réalité. Dans les faits, les pouvoirs publics déterminent des types d'impôts et des barèmes qui ont force de loi. Connaissant ce système fiscal, chaque agent est alors censé maximiser sa satisfaction sous la contrainte de son revenu disponible, compte tenu du prix d'achat TTC du bien privatif composite et du salaire horaire net de tout prélèvement. Les recettes publiques qui en découlent sont censées être utilisées pour financer – exactement[6] – le bien public, dont le niveau se trouve ainsi déterminé. Ce niveau de bien public participe à la satisfaction « *ex post* » de

(1) Ou à un responsable politique.
(2) Le niveau de bien public optimal serait celui pour lequel la somme des contributions volontaires (ou « souscriptions ») des agents serait égale au coût dudit bien public.
(3) Voir Annexe 2, relations (16).
(4) On trouvera aussi en Annexe 2 un examen de la variation du temps de travail en fonction du salaire horaire *superbrut* : voir notamment figure A.1. Lorsque le salaire horaire *superbrut* croît, à partir de sa valeur plancher précitée (qui dépend du revenu non-salarial), alors le temps de travail commence à croître, passe par un maximum, puis décroît. Cette forme corrobore les observations empiriques : voir P. Cahuc et A. Sylberberg (1996) « *Economie du travail* », De Boeck, page 28.
(5) On utilise ce terme pour le distinguer le « l'optimum de second rang », qui est un optimum partiel spécifique « optimisé », correspondant à une structure de prélèvements obligatoire ajustée de façon à remplir deux conditions : utiliser les facteurs de production de façon efficace ; maximiser une fonction d'utilité collective de forme supposée connue (Diamond et Mirrlees (1971), Guesnerie (1995), etc.).
(6) Sous l'hypothèse (forte) de l'équilibre budgétaire.

l'agent représentatif, sans que celui-ci ait eu à se prononcer consciemment et explicitement[1].

Si les pouvoirs publics (en dépit de l'asymétrie d'information) connaissaient cette fonction de réaction de l'agent représentatif, ils auraient alors la possibilité de déterminer le système fiscal de façon à atteindre leur propre objectif, consistant – on peut le supposer – à maximiser le bien-être collectif, c'est-à-dire ici celui de l'agent représentatif. La question se pose alors de savoir si ce maximum de satisfaction « avec prélèvements obligatoires optimisés » peut atteindre le maximum de premier rang.
La réponse est positive dans un cas et un cas seulement : on peut montrer l'existence d'un prélèvement forfaitaire – de valeur déterminée – sous l'effet duquel l'agent représentatif adopterait des choix identiques à ceux de l'optimum de premier rang. Le forfait serait exactement égal au besoin de financement du bien public optimal. Le COFP serait égal exactement à 1, le coefficient λ serait nul.[2].

Tous les autres types d'impôt auraient un impact sur la valeur du salaire horaire disponible rapportée au prix d'achat TTC du bien composite. La modification de ce « pouvoir d'achat du salaire horaire » modifierait inévitablement, par rapport à l'optimum de premier rang, les choix de l'agent représentatif en matière de consommation de bien privé composite et de temps de travail souhaité ; par ricochet, les recettes publiques seraient aussi modifiées, ainsi que, par conséquent, le niveau de bien public finançable. <u>À modalités de prélèvements obligatoires données</u>, il est théoriquement possible de rechercher le barème qui maximiserait la satisfaction ainsi atteignable, c'est-à-dire qui minimiserait la perte de satisfaction par rapport à l'optimum de premier rang ; ce barème optimisé conduirait alors à un « optimum partiel spécifique », propre au système fiscal considéré[3]. Mais cet optimum partiel spécifique implique un COFP supérieur à 1, c'est-à-dire une valeur non nulle du coefficient λ.

Cet optimum est spécifique à la structure du système fiscal, c'est-à-dire des différentes modalités de prélèvements obligatoires qui le composent. Autrement dit, il existe autant d'optimums partiels spécifiques que de systèmes fiscaux. Tel système peut donc apparaître plus performant que tel autre si le niveau de satisfaction correspondant à l'optimum partiel spécifique du premier nommé est supérieur à celui du second. Il se peut ainsi que la recherche de la performance suggère de réduire à zéro tel ou tel type de prélèvement obligatoire[4].

---

(1) Il existe bien entendu un contrôle par les élections, qui sont le moyen de définir un arbitrage entre prélèvements et bien public, et de désigner des élus pour mettre ce programme en œuvre.
(2) La fixation d'une valeur différente du forfait induirait une perte de satisfaction ; si le forfait était inférieur à sa valeur optimale, cette perte proviendrait d'un sous-dimensionnement du bien public et d'un surdimensionnement de la consommation de bien privatif et/ou du loisir ; et inversement en cas de forfait supérieur à sa valeur optimale ; mais dans les deux cas, la perte de satisfaction serait du second ordre.
(3) La fixation d'un barème différent induirait par rapport à cet optimum partiel spécifique une perte de satisfaction ; si le barème était « trop bas », il conduirait (en supposant les élasticités inférieures 1) à des recettes publiques inférieures à celles de l'optimum partiel spécifique et, par suite, à un sous-dimensionnement du bien public, avec en contrepartie un surdimensionnement de la consommation de bien privatif et/ou du loisir, par rapport à leurs valeurs optimales ; et inversement en cas de barème « trop haut » ; mais dans les deux cas la perte de satisfaction par rapport à l'optimum partiel spécifique serait du second ordre.
(4) Passage d'un optimum « libre » à un optimum « en coin ».

Il importe toutefois de souligner que chaque modalité de prélèvement obligatoire poursuit en réalité un objectif particulier donné, ce qui explique que son éventuelle suppression puisse poser problème[1]. La recherche de la « performance » pure serait d'ailleurs paradoxale, car il est clair que seuls seraient « raisonnables » des prélèvements forfaitaires… à cela près qu'on ne sait pas les mettre en œuvre et qu'il faut bien d'autres recettes publiques, sans quoi le bien public serait réduit à zéro, ce qui serait très sous-optimal.

Encadré 2 - Sensibilité par rapport aux différentes formes de prélèvements obligatoires

L'approche très simplifiée adoptée ci-dessus livre quelques indications sur la sensibilité des résultats par rapport aux différentes formes de prélèvements obligatoires.

Toujours en considérant comme exogènes le salaire horaire *superbrut*, le revenu non-salarial, le prix de production du bien privatif composite et le coût unitaire de production du bien public, et en supposant inférieure à 1 les élasticités de substitution de la fonction d'utilité, il est possible d'analyser l'influence propre à chaque type de prélèvement obligatoire sur les choix de l'agent représentatif.

Des effets examinés en détail en annexe 2, on retiendra ici quelques différences d'impact.

Ces différences tiennent au fait qu'une taxe sur le bien privatif composite a un effet unique de renchérissement du prix d'achat[2], tandis qu'un prélèvement sur le salaire horaire *superbrut*, en réduisant le salaire horaire net, a deux effets antagoniques, l'un de diminution du « prix du loisir »[3], l'autre de diminution du revenu calendaire disponible[4], ce second effet étant d'autant plus sensible que le revenu non-salarial est faible et/ou est peu imposé.

Une superposition des différents types de prélèvements obligatoires superpose aussi les effets, rendant ainsi l'analyse plus laborieuse.

Élargissement de l'approche

À l'évidence, l'approche adoptée dans ce qui précède est insuffisante, sur de nombreux points :

- l'hypothèse de l'agent représentatif est très réductrice, car les agents sont en réalité très hétérogènes (ce qui soulève *ipso facto* la problématique de la cohésion et de la justice sociales) ;
- l'hypothèse d'un bien privatif composite masque la très grande variété et différentiation des biens et services, qui interviennent dans la fonction d'utilité, et sont parfois substituables, parfois complémentaires. De plus, certains de ces

(1) Il convient ici de rappeler le « théorème de Tinbergen », selon lequel il faut autant d'instruments de politique socio-économique que d'objectifs de politique socio-économique.
(2) Si le prix d'achat croît, alors la consommation du bien décroît (seule exception : biens présentant le « paradoxe de Giffen »). Voir P. Picard (2002) « *Eléments de microéconomie* », Montchrestien, page 61.
(3) Si le salaire horaire net (assimilable ici au « prix du loisir ») décroît, alors le loisir croît.
(4) Si le salaire horaire net décroît, le revenu salarial calendaire décroît ; le revenu calendaire net total est réduit, mais la part du revenu non-salarial (non touché par le prélèvement sur le salaire horaire super-brut) « relativise » cette réduction. L'agent représentatif est censé avoir la possibilité de neutraliser la perte de revenu salarial calendaire en augmentant son temps de travail, c'est-à-dire en réduisant son loisir. Cette analyse se limite à une représentation très schématique des prélèvements obligatoires.

biens et services exercent des externalités, positives[1] ou négatives[2] dont il a été fait abstraction ;

- le bien public est lui aussi schématisé à l'extrême. Il revêt en réalité des formes très diverses : fonctions régaliennes, infrastructures publiques, santé, éducation, culture, etc. ;
- les types de prélèvements obligatoires envisagés sont très schématiques. Par exemple, l'impôt sur le revenu est supposé à taux unique, alors que l'hétérogénéité des agents soulève – entre autres – le problème de la progressivité du barème. Autre exemple : la taxe sur le bien privatif composite est supposée reposer sur un taux unique, alors que les taxes sur les biens et services sont très diverses (taux de TVA, accises, etc). De même, on a ignoré les subventions ou prélèvements « à la Pigou » qu'il serait justifié d'appliquer aux biens et services précités exerçant des externalités positives ou négatives ;
- le temps de travail est traité comme une variable continue, alors qu'il dépend de nombreux déterminants socio-économiques[3] qui en font une variable segmentée ;
- l'attention porte uniquement sur la satisfaction du consommateur. Il a été fait totalement abstraction du « bloc de l'offre ». Il y aurait lieu d'introduire une fonction de production du bien composite et, le cas échant, une autre fonction de production pour le bien public ;
- le salaire *superbrut* est traité comme exogène, alors qu'il devrait être mis en rapport avec la productivité marginale du travail, c'est-à-dire être – au moins en partie – endogénéisé ;
- le prix du bien privatif devrait être mis en relation avec le coût des facteurs de production (travail, mais aussi capital) ;
- les revenus non-salariaux, intégrant les revenus du patrimoine, devraient à leur tour être – au moins partiellement – endogénéisés ;
- l'approche est statique, ou en tout cas stationnaire. Le budget est supposé en équilibre. Il est fait abstraction des choix intertemporels. On ignore l'épargne. On ignore l'accumulation du capital productif ;
- enfin, il est fait abstraction des échanges extérieurs de biens et services et de capitaux. Ce qui passe sous silence les effets sur la compétitivité, sur la dette extérieure.

La recherche d'un « optimum de second rang », c'est-à-dire de taxes optimales susceptibles de maximiser une fonction supposée connue d'utilité collective, sous la contrainte des technologies disponibles utilisées efficacement, a fait l'objet de nombreux travaux depuis les articles pionniers de Diamond et Mirrlees (1957). Mais les applications restent ardues et, de ce fait, rares et limitées.

Voies de l'estimation du coût d'opportunité des fonds publics

La prise en compte des différentes préoccupations susmentionnées rend inévitable le recours à une certaine modélisation et à des simulations numériques, ce qui soulève en contrepartie deux difficultés classiques : 1/ surmonter l'aspect « boîte noire » des

(1) Exemple : hygiène.
(2) Exemples : Pollution atmosphérique, émissions de gaz à effet de serre, bruit, etc...
(3) Voir Annexe 2, page 30.

modèles et 2/ disposer de données statistiques appropriées ainsi que d'estimations pertinentes et fiables des paramètres-clés (comme par exemple les élasticités[1]).

L'estimation du coût d'opportunité (ou coût marginal social) des fonds publics se fait, comme son nom l'indique, à la marge d'un état socio-économique donné, compte tenu notamment du système fiscal en place. La démarche est alors simple dans son principe : on augmente le barème d'un prélèvement obligatoire, de type donné, de façon à obtenir une recette publique supplémentaire nette « marginale » (idéalement, 1 €) et on mesure la perte d'utilité monétarisée $(1+\lambda)$ qui en résulte pour le système socio-économique dans son ensemble. Pour qu'un projet dégage un bénéfice socio-économique positif, il faudra donc que, pour l'apport de chaque euro d'argent public financé avec ce type de prélèvement obligatoire, ce projet produise un avantage socio-économique monétarisé (actualisé) au moins égal à $(1+\lambda)$, ce qui revient, dans le calcul habituel « coûts-avantages », à multiplier par $(1+\lambda)$ la valeur nominale (actualisée) des dépenses du projets (investissement, entretien, etc.) financées par fonds publics.

Le coefficient λ prend une valeur spécifique à chaque type de prélèvement obligatoire, en principe nulle pour un prélèvement forfaitaire et positive dans tous les autres cas. Pour chaque type de prélèvement obligatoire, la valeur de λ dépend en outre du positionnement du taux en vigueur dudit prélèvement par rapport au « taux optimal » qu'il devrait avoir à l'optimum partiel spécifique relatif au système fiscal en place. Selon que le taux de prélèvement en vigueur est inférieur, égal ou supérieur au taux « optimal », λ devrait en principe être inférieur, égal ou supérieur à sa valeur « optimale » correspondante[2] .

Cependant, le système fiscal en vigueur a une forte probabilité d'être sensiblement éloigné de « l'optimum de second rang » théorique, ne serait-ce qu'à cause de la considérable complexité de l'organisation socio-économique, sans parler des chocs et déséquilibres macroéconomiques. On s'attend donc à des valeurs de λ non assimilables à 0, sinon pour tous les types de prélèvements obligatoires, du moins pour la plupart d'entre eux.

2.3 Estimations du COFP

S'il est généralement admis que le paramètre λ est compris dans un intervalle allant de 0 à 0,5, son estimation précise s'avère être une tâche ardue.

Aux États-Unis, les études de Browning (1987[3]), Stuart (1984[4]), Ballard et al. (1985[5]), Snow et Warren (1996) ont conduit à des estimations du COFP comprises entre 1,1 et 1,4.

---

(1) Elasticité par rapport au revenu ; élasticités par rapport aux différents prix.
(2) Voir par exemple encadré 1, figure 1.
(3) Browning (1987), "*On the marginal welfare cost of taxation*", American economic review.
(4) Stuart (1984), "*Welfare cost per dollar of additional tax revenue in the United States*", American economic review.
(5) Ballard et al. (1985), "*General equilibrium computations of the marginal welfare costs of taxes in the United States*", American economic review.

Des cadres théoriques ont été développés dans la recherche académique pour obtenir une expression analytique du COFP et pouvoir ainsi l'estimer quantitativement. Le premier, dû à Mayshar (1991[1]) et Snow et Warren (1996[2]), raisonne sur un agent représentatif. Cette dernière étude corrobore l'estimation de la fourchette de 1,1 à 1,4. Le second cadre théorique, conçu par Dahlby (1998[3]), Sandmo (1998[4]) et Snow et Allgood (1998[5]), considère des agents hétérogènes, afin de prendre en compte les motifs redistributifs de la taxation. Toutefois, dans ces deux approches théoriques, l'ensemble des biens de consommation sont agrégés en un bien composite, utilisé comme numéraire non-taxé, et le COFP est estimé à travers l'étude d'une augmentation de l'impôt sur le revenu (IR). Il n'est donc pas possible d'approcher le COFP relatif à l'imposition des biens ou du capital[6].

Laffont (1998[7]), dans une revue de littérature, aboutissait à un intervalle moyen allant de 1,3 à 1,5 pour les pays développés.

Jones (2005[8]) effectue aussi une revue de la littérature et aboutit à des valeurs du COFP associés à une taxation sur les salaires allant de 1 à 1,57. Dans ces travaux, l'auteur distingue notamment les estimations « conventionnelles » (respectivement « modifiées »), c'est-à-dire excluant (respectivement intégrant) dans l'estimation du COFP les variations de bien-être liée à la manière dont l'argent prélevé est dépensée. L'argent public étant normalement dépensé dans des projets créateurs de valeur collective, Jones (2005) constate naturellement que les estimations « modifiées » sont structurellement plus faibles que les estimations « conventionnelles ». Notons que dans les évaluations coûts-avantages des projets d'infrastructures, les gains d'utilité engendrés par la dépense publique dans le projet (gains de temps, réduction de la pollution, etc.) sont précisément détaillés dans la valeur actuelle nette du projet et, dans la terminologie de Jones (2005), la valeur du COFP ressortit donc à l'approche « conventionnelle ».

En France, dans les rapports du Commissariat Général du Plan, la valorisation d'une unité de dépense publique est ainsi passée de 1,2 en 1975 à 1,5 en 1985, alors que, dans le même temps, le taux d'actualisation était ramené de 10 % à 8 %.

Le rapport Lebègue (2005), sur la base d'une nouvelle revue de littérature effectuée par ses auteurs, a finalement conclu que le coefficient de 1,5 était excessif. Les principaux travaux mobilisés avaient été les suivants :

---

(1) Mayshar (1991), "*On measuring the marginal cost of funds analytically*", American economic review.
(2) Snow, Warren (1996), "*The marginal welfare cost of public funds: theory and estimates*", Journal of public economics.
(3) Dahlby (1998), "*Progressive taxation and the social marginal cost of publics funds*", Journal of publics economics.
(4) Sandmo (1998), "*Redistribution and the marginal cost of publics funds: theory and estimates*", Journal of public economics.
(5) Allgood, Snow (1998), "*The marginal cost of raising tax revenue and redistributing income*", Journal of political economy.
(6) Par ailleurs, ces travaux ne permettent pas de prendre en compte l'impact d'une réforme fiscale de l'IR sur les autres niveaux de consommation et, par transitivité, sur les recettes fiscales des taxes préexistantes.
(7) Laffont (1998), "*Competition, Information, and Development",* Annual, World Bank Conference on Development Economics, Washington DC.
(8) Jones (2005), "*Applied welfare economics*", Oxford University Press, Oxford, UK.

– Bernard et Vielle (2003[1]) : sur la base d'un modèle d'équilibre général calculable, ces auteurs aboutissaient à un coefficient de 1,13 pour la France. Ils obtenaient toutefois pour les Etats-Unis un coefficient de 1,02, nettement inférieur aux estimations américaines susmentionnées[2] ;

– les travaux précités de Snow et Warren : appliquée dans le cadre des travaux du groupe, les auteurs du rapport Lebègue estiment que cette méthode conduirait à un coefficient compris entre 1,1 et 1,4.

In fine, les auteurs du rapport concédaient « *qu'une évaluation précise et récente pour l'économie française [restait] à faire* ». Néanmoins, en attendant une telle investigation, ils recommandaient de tenir compte de cet effet dans les évaluations socioéconomiques et d'appliquer, à titre conservatoire, un coefficient de 1,3 (inférieur[3] à celui de 1,5 proposé en 1985).

Encadré 3 - Participation « intensive » ou « extensive » au marché du travail

Une revue de la littérature académique sur les estimations du COFP montre que les valeurs obtenues peuvent différer pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, les estimations peuvent différer selon la complexité de la modélisation des mécanismes de réponses à la taxation. Plus l'élasticité des réactions à la taxation est importante, plus l'estimation du COFP est élevée.

Par ailleurs, comme déjà évoqué lors de la revue des travaux de Jones (2005), les différences peuvent aussi provenir de l'usage d'approches *« conventionnelle »* ou *« modifiée »*.

Enfin, un autre cas particulier de variante dans la modélisation est la possibilité, lors d'une taxation du salaire, que l'offre de travail réagisse soit de manière « intensive » (i.e. réduction du nombre d'heures travaillées) soit aussi de manière « extensive » (i.e. possibilité de quitter totalement le marché du travail au-delà d'un certain seuil de taxation). Le tableau ci-dessous, issu de Kleven et Kreiner (2006[4]), illustre par exemple les différences d'estimation du COFP selon les pays et selon l'hypothèse qui est faite sur la réaction de l'offre de travail à une taxation du salaire

(1) Bernard, Vielle (2003), "*Measuring the Welfare Cost of Climate Change Policies: A Comparative Assessment Based on the Computable General Equilibrium Model GEMINI-E3*", Environmental Modeling & Assessment, Vol. 8 n° 3.
(2) Snow, Warren (1996), "*The marginal welfare cost of public funds: theory and estimates*", Journal of Public Economics.
(3) Abraham (2007, document non publié) considère *ex post* que le choix d'avoir majoritairement eu recours à des autoroutes à péages en France plutôt qu'à des autoroutes gratuites financées sur fonds publics témoigne d'un coefficient implicite appliqué aux fonds publics situé entre 1,4 et 1,5. Celui-ci peut alors s'interpréter comme la somme d'un COFP et d'un coût de rareté (voir la partie 2 de la présente note), sans pour autant que l'article distingue ces deux effets.
(4) Kleven, Kreiner (2006), "*The marginal cost of public funds: hours of work versus labour force participation*", Center for Economic Policy Research, Discussion Paper n° 5594.

Tableau 1 – Estimation du COFP de plusieurs pays dans le cas d'une réforme marginale de la taxation des salaires

Pays	*COFP – réponse intensive de l'offre de travail.*	*COFP – réponses intensive et extensive de l'offre de travail.*
Espagne	1,07	1,19
Royaume-Uni	1,1	1,26
Grèce	1,11	1,26
Luxembourg	1,14	1,32
Irlande	1,16	1,45
Autriche	1,18	1,56
Pays-Bas	1,18	1,52
Italie	1,19	1,52
France	**1,21**	**1,72**
Allemagne	1,23	1,85
Suède	1,28	2,08
Danemark	1,29	2,22
Finlande	1,31	2,23
Belgique	1,32	2,14

Source : Kleven, Kreiner (2006). Note de lecture: les valeurs du COFP sont obtenues en simulant une hausse de la taxation des salaires sur l'ensemble de la population. Les différences d'estimation du COFP selon les pays s'expliquent par les différences entre les régimes de taxation et entre les élasticités des consommateurs et des producteurs à la taxation. De manière générale, on constate que le COFP lié à un alourdissement de la fiscalité sur une activité économique (resp. sur un bien ou un service) est plus élevé dans un pays avec une forte élasticité de l'offre de travail (resp. de la demande en bien ou en service). De plus, il semble exister une corrélation entre la valeur du COFP et le poids des dépenses publiques.

Estimations de Mickael Beaud pour la France (2008)

A notre connaissance, le dernier article académique relatif à l'estimation du COFP pour la France concerne les travaux de Beaud (2008)[1]. À partir d'un modèle d'équilibre général, l'auteur fournit une expression analytique du COFP. Puis, en s'appuyant sur l'enquête Budget des Familles 2001 de l'INSEE et sur le Code Général des Impôts en vigueur au moment de l'enquête, il passe en revue différents types de prélèvements obligatoires : fiscalités directes, indirectes et forfaitaires, ainsi que les interactions qu'elles entretiennent. Pour chacun de ces prélèvements, il estime le COFP spécifique correspondant. Il évalue ensuite le COFP d'ensemble.

L'auteur obtient les résultats suivants. Avec des hypothèses d'élasticités centrales, le COFP s'établit entre 0,95 et 2,16 selon la modification fiscale envisagée :

– les prélèvements *forfaitaires* (dont se rapproche par exemple la taxe pour l'audiovisuel public) produisent les COFP les plus faibles, compris entre 0,95 et 1,09, selon qu'ils touchent les ménages les plus ou les moins productifs[2] ;

(1) Beaud (2008), "*Le coût social marginal des fonds publics en France*", Annales d'Economie et de Statistique, n° 90.
(2) Même si le prélèvement est forfaitaire, on constate que le COFP n'est pas égal à 1. Beaud (2008) explique cela par le fait que la fiscalité n'est pas entièrement forfaitaire et, surtout, par le fait que les élasticités revenu de tous les biens taxés ne sont pas nulles. En effet, de par les effets de revenu que le prélèvement forfaitaire induit, celui-ci modifie l'assiette de la fiscalité en place et réduit les recettes de taxation directe et indirecte (tous les biens étant supposés normaux).

– la taxation *indirecte* (comme la TVA sur les biens de consommation) donnent des COFP de valeurs intermédiaires, comprises entre 1,07 et 1,13 ;

– l'impôt *direct* (comme l'impôt sur le revenu) comporte l'éventail de COFP le plus ouvert, puisqu'il va de 1,08 à 2,16, la valeur la plus haute concernant les tranches supérieures d'imposition.

De tels intervalles peuvent toutefois varier selon les hypothèses prises pour les élasticités[1] de l'offre de travail et de la demande de biens.

Plusieurs points mériteraient d'être approfondis :

– la modélisation employée suppose que l'offre de travail des agents économiques est « intensive », c'est-à-dire qu'elle peut s'ajuster de façon continue, et n'envisage pas le cas où cette offre serait « extensive », avec le risque qu'en cas d'horaires trop faibles certains agents économiques ne participent plus au marché du travail. Or, cette omission tend à sous-estimer le COFP (voir encadré 3) ;

– une interrogation particulière concerne les COFP relatifs à l'impôt sur le revenu, qui peuvent atteindre des valeurs très élevées. Ce type d'impôt étant motivé principalement par une préoccupation de réduction des inégalités et de cohésion sociale, la question est de savoir si les résultats obtenus sur ce point sont pris correctement en compte, en contrepartie des distorsions, ce qui revient à se demander si la fonction d'utilité collective sous-jacente reflète convenablement cette finalité (voir encadre 4). A cet égard, comme déjà mentionné, le deuxième théorème du bien-être établit qu'il existe un système de prix et de transferts forfaitaires permettant d'atteindre de façon décentralisée (sous la forme d'un marché concurrentiel), toute situation socio-économique Pareto-optimale, jugée souhaitable du point de vue de l'éventail des satisfactions. Reste la difficulté que les transferts forfaitaires sont très difficiles à mettre en œuvre et que les autres dispositifs fiscaux introduisent inévitablement des effets distorsifs. Il faut donc souhaiter que les réflexions soient poursuivies et approfondies sur l'arbitrage entre effets distorsifs et redistribution, notamment dans le cadre théorique de « l'optimum de second rang » ;

– on notera aussi qu'il serait utile de disposer d'une estimation du COFP pour les finances locales.

Encadré 4 - Prise en compte de l'hétérogénéité des agents et du caractère redistributif de la taxation

La plupart des articles académiques abordant les sujets de coût d'opportunité des fonds publics et de distorsion de la taxation font l'hypothèse que tous les agents économiques sont identiques et qu'ils sont traités de la même manière par le gouvernement. L'hétérogénéité des agents et l'impact redistributif de la taxation sont donc omis des estimations du COFP. Or, il est parfois avancé que la principale justification de taxes non-forfaitaires distorsives est la volonté de mettre en place une redistribution de la richesse entre des individus dont les situations économiques sont hétérogènes. Certains auteurs (dont Kaplow (1996[2]) et Sandmo (1998[3])) estiment donc qu'il n'est pas justifié, dans les

(1) Elasticité par rapport au revenu disponible, élasticités par rapport au prix TTC de chaque bien ou service (ainsi que du « loisir »).
(2) Kaplow (1996), "*The optimal supply of public goods and the distortionary cost of taxation*".
(3) Sandmo (1998), "*Redistribution and the marginal cost of public funds*".

analyses coûts-avantages, de ne considérer que la perte d'efficacité économique provenant de la taxation.

Selon ces auteurs, de la même manière que l'effet distorsif de la taxation représente le coût de politiques redistributives, une distribution plus égalitaire des ressources prélevées représente le gain à mettre au regard de l'effet distorsif. Selon Kaplow (1996), à l'optimum, les coûts de la taxation sont entièrement compensés par les aspects redistributifs de la dépense, de sorte qu'avec valorisation des aspects redistributifs dans les analyses coûts-avantages, le « COFP amont-aval » (i.e. intégrant variations d'utilité liées aux prélèvements comme à la dépense publique[1]) devrait être égal à 1. Sandmo (1998) reconnaît néanmoins que cette situation optimale s'avère hautement irréaliste projet par projet comme globalement.

Davantage de recherches devraient être menées sur ces sujets :

- tout d'abord, il paraît nécessaire de vérifier dans quelle mesure les taxes à vocation redistributive sont effectivement les plus distorsives du système de taxation ;
- de plus, si la distorsion de la taxation est attribuée à la volonté de faire de la redistribution, il serait utile d'estimer la fonction d'utilité sociale implicite du système de taxation français afin d'être à même de pondérer de manière cohérente les bénéfices qu'une dépense publique engendre pour chaque catégorie de la population ;
- enfin, selon nous, dans une logique où l'ensemble des coûts et des bénéfices des politiques publiques sont valorisés en tant que tels dans leurs valeurs actualisées nettes, les effets redistributifs engendrés *lors des prélèvements* devraient être intégrés dans une ré-estimation du COFP tandis que les ceux engendrés *par le projet* devraient être identifés et valorisés avec la même pondération que dans ladite fonction d'utilité sociale.

Par ailleurs, on note que ni les travaux de Beaud, ni les travaux précités, ne traitent le cas des subventions ou taxes « pigouviennes », qui visent à internaliser les effets externes positifs ou négatifs dans le prix de vente des biens ou services marchands. Prenons l'exemple d'un bien marchand dont la production (ou la consommation) s'accompagne d'un effet externe négatif, par exemple sous la forme d'une pollution. La taxe pigouvienne consiste ajouter au coût (marginal) de production de ce bien la valeur monétarisé des pertes d'utilités subies par l'ensemble des personnes affectées par la production (ou la consommation) d'une unité marginale dudit bien. Par construction, la taxe induit une perte d'utilité pour le consommateur du bien marchand, mais cette perte est en principe exactement compensée par la réduction des désagréments liés à la pollution, de sorte que le coût marginal d'opportunité des fonds publics spécifique à la taxe pigouvienne est globalement nul. Des analyses plus approfondies mériteraient toutefois d'être menées à ce sujet.

Compte tenu de COFP de valeurs différentes selon la nature du prélèvement obligatoire, la question se pose de savoir comment il convient de les utiliser dans le cas des analyses coûts-avantages des projets impliquant des dépenses publiques. Comme le précise Beaud (2008), hors du cadre de la taxation optimale et des réflexions visant des réformes spécifiques, les dépenses publiques consenties ne sont que rarement liées à des prélèvements spécifiques. Cela conduit à considérer un COFP global, reflétant l'inefficacité de l'ensemble du système d'imposition. L'auteur

(1) Dans cette note, on rappelle que l'on privilégie l'approche selon laquelle la valeur du COFP n'intègre que la désultilité collective engendrée par les prélèvements. Le gain d'utilité lié à la dépense publique dans un projet (gain de temps, diminution de la pollution atmosphérique, etc.) est en effet modélisation à part entière dans les bénéfices du projet.

préconise à cet égard, sans que cette valeur soit clairement estimée, de retenir une valeur moyenne de 1,2 pour la France (soit la même valeur que celle historiquement retenue dans le Commissariat Général du Plan en 1975).

En absence de plus amples recherches spécifiques à la France, et sous condition de prendre correctement en compte l'effet de rareté des fonds publics (voir plus bas), il pourrait être recommandé de retenir pour le COFP la valeur de 1,2.

Enfin, il est souhaitable de revisiter périodiquement la question du COFP, tant sous l'angle théorique que sous celui des simulations et estimations, pour en recadrer l'usage dans le calcul économique, par exemple tous les cinq ans.

2.4 Faut-il appliquer le COFP aux fonds publics bruts ou nets apportés au projet ?

Le rapport Lebègue (2005) et la mise à jour de l'instruction cadre de Robien (2005) qui le suivait préconisaient de prendre en compte le COFP *via* l'introduction d'un coefficient 1+λ « *qui s'applique à tout euro public dépensé dans un projet (…)* ». (Instruction cadre de Robien (2005), Annexe 3, partie 3, p.58). Il n'était pas précisé dans le texte s'il s'agissait des dépenses brutes ou nettes des recettes publiques générées par le projet.

Précisons que le COFP doit s'appliquer à tout euro de dépenses publiques <u>nettes</u> (dépenses publiques moins recettes publiques) directement attachées au projet. En effet, les nouvelles recettes engendrées par le projet sont de même nature que des prélèvements évités.

Par ailleurs, *sans modification des taux ou des assiettes des différentes taxes*, la valeur du COFP à appliquer aux dépenses comme aux recettes publiques est bien la même, celle du COFP global reflétant l'inefficacité de l'ensemble du système d'imposition.

<u>Encadré 5</u>

Prenons en exemple le cas d'un projet autoroutier supposé entièrement financé par l'État et dont la réalisation aura notamment pour conséquence de reporter des usagers du mode ferroviaire vers la route. L'usage de la route étant accentuée, la consommation de carburants devrait augmenter, générant simultanément des recettes supplémentaires de taxe sur les carburants à destination de l'État. Il conviendra donc dans le bilan socio-économique de ce projet d'appliquer le COFP moyen d'une part aux coûts d'investissements et d'autre part aux recettes de taxe sur les carburants. En effet, ces recettes de taxation permettront de diminuer les prélèvements qu'aurait dû mettre en œuvre l'État pour financer, sinon ce projet lui-même, du moins d'autres projets publics à venir. Par ailleurs, ces recettes sont issues d'une hausse de la consommation de carburant mais ni l'assiette ni le taux des différentes taxes n'ont été modifiée, la taxation des carburants existant sous son barème actuel indépendamment de la réalisation ou non du projet. Le COFP que l'on applique aux recettes correspond donc bien au COFP moyen du système fiscal.

2.5 La valeur du COFP devrait-elle être différenciée selon la source de financement ?

L'obtention de valeurs *marginales* du COFP différenciées selon l'efficacité économique des prélèvements utilisés soulève la question de savoir s'il serait opportun, dans les analyses coûts-avantages, de préconiser l'utilisation de différentes valeurs tutélaires du COFP.

Une telle préconisation semblerait cohérente avec la théorie économique lorsqu'une nouvelle taxe est spécifiquement mise en place pour financer un projet donné. Dans ce cas, l'analyse coûts-avantages du projet consiste en une évaluation coûts-avantages simultanée de l'infrastructure et de la nouvelle taxe.

A l'inverse, une telle différenciation du COFP n'est pas pertinente lorsque qu'un projet est financé par une taxe qui aurait de toute façon été mise en place, que le projet se réalise ou pas (i.e. en situation de projet comme en situation de référence). Dans ce cas, la théorie économique suggère que les ressources publiques ainsi générées soient affectées au budget général de l'état[1] et, que lors d'analyses coûts-avantages, le COFP associé à la dépense publique soit le COFP *moyen* de la fiscalité française.

En définitive, sauf lors d'une analyse coûts-bénéfices d'une nouvelle taxation, il semble préférable de retenir une valeur tutélaire du COFP *moyenne* et *unique* pour l'ensemble des projets dans lesquels la puissance publique intervient financièrement.

3 Prise en compte de la rareté des fonds publics

3.1 Depuis la crise financière de 2008, les contraintes quantitatives assignées aux finances publiques se sont renforcées

Selon le rapport Champsaur-Cotis (2010) sur la situation des finances publiques, depuis la fin des années 1970, les finances publiques françaises se sont progressivement dégradées. En témoigne la croissance continue du poids de la dette publique par rapport au Produit Intérieur Brut (PIB) : alors qu'elle était de 20 % du PIB à la fin des années 1970, elle a franchi le seuil de 60 % du PIB en 2002 et approche 80 % du PIB en 2009.

Avec la crise financière de 2008, cette dérive s'est accélérée. Retrouver la maîtrise des finances publiques est désormais un objectif majeur des autorités politiques.

(1) De manière générale, la pré-affectation de recettes à des dépenses spécifiques est contraire au principe d'universalité budgétaire, consistant à dire qu'aucune personne ne peut se prévaloir du fait de ses paiements – et non ceux d'autrui – servent à financer un projet donné. Par ailleurs, la pré-affectation de ressources à des dépenses spécifiques n'est pas économiquement optimale. En effet, naît le risque de flécher ces ressources vers des projets dont la rentabilité pour la collectivité est basse, alors que d'autres projets plus souhaitables dans d'autres secteurs pourraient être soutenus en priorité. Enfin, la pré-affectation de ressources à des dépenses spécifiques crée parfois une incitation, pour les organismes bénéficiaires de la recette, à modifier l'outil de prélèvement au profit d'un instrument de rendement (i.e. générant le plus de recettes possibles) et au détriment d'un instrument plus correctement calibré.

Dans ce contexte, l'État cherche à réduire ses dépenses tout en prélevant davantage d'impôts, que ce soit pour pouvoir honorer les engagements déjà contractés ou pour anticiper des dépenses à venir prévisibles (comme le paiement des retraites).

On s'attend donc à ce que les enveloppes budgétaires annuelles allouées au financement des projets soient insuffisantes pour financer la totalité des projets dont le bénéfice socio-économique (une fois pris en compte de COFP) est positif. Il convient alors de hiérarchiser ces projets et d'optimiser leur date de réalisation de façon à maximiser l'utilité collective sous la contrainte de la chronique, supposée connue, des enveloppes budgétaires disponibles.

3.2 Les méthodes permettant d'optimiser une chronique d'investissements sous contrainte de ressources publiques n'ont pas toujours fait l'objet de consensus

La situation présente des finances publiques est particulièrement tendue, mais elle n'est pas inédite. La programmation des projets a déjà fait l'objet de réflexions et de préconisations approfondies.

Dès 1959, Laure et Abraham (1959[1]) ont montré que la date optimale de réalisation d'un projet est celle où le taux de rentabilité immédiate (i.e. le rapport entre les bénéfices socio-économiques nets de l'année de mise en service et le coût d'investissement) devient égal ou supérieur au taux d'actualisation (voir plus loin encadré 5). Ce résultat assure que la VAN du projet est, non seulement positif, mais aussi maximale. En conséquence, dès lors que la rentabilité immédiate d'un projet a dépassé le taux d'actualisation, il faut le réaliser le plus rapidement possible.

En 1981, le rapport du Plan « *Calcul économique et résorption des déséquilibres*[2] » a préconisé, « *à l'intérieur de chaque enveloppe sectorielle, d'appliquer un coefficient majorateur affectant les dépenses publiques.* ». En 1983, J. Thédié[3] a développé cette approche en précisant que le coefficient majorateur est en fait annuel et peut varier « *de manière très importante* » d'une année à l'autre.

Le rapport Lebègue[4] (2005) préconise de hiérarchiser les projets par ordre décroissant du ratio « *Bénéfice socio-économique net actualisé (ou VAN*[5]*), tenant compte du COFP, par* ***euro <u>public</u> dépensé*** **», et de ne retenir que ceux dont la somme cumulée des dépenses** publiques est compatible avec l'enveloppe des financements publics disponibles[6].

---

(1) Laure et Abraham (1959), « *Étude des programmes d'investissements routiers* », Annales des Ponts et Chaussées, novembre-décembre 1959.

(2) Commissariat général du Plan (1983) « *Calcul économique et résorption des déséquilibres* », E. Malinvaud, R .Guesnerie, B. Walliser, D. Goudard, La Documentation française.

(3) J. Thédié (1983) « *Du choix des investissements sous contrainte financière* », Annales des Ponts et Chaussées, 1[er] trimestre.

(4) Jam. cit., page 74 du rapport.

(5) Valeur actualisée nette. Ce terme est ambigu, car il est souvent utilisé comme synonyme de « bénéfice socio-économique « (point de vue « de l'intérêt général »), alors que l'instruction cadre le réserve à la mesure de la rentabilité financière pour l'opérateur (point de vue de l'opérateur). Par VAN on entend bien ici ce que l'instruction cadre appelle « bénéfice socio-économique ».

(6) L'utilisation de ce critère suppose qu'un choix a été arrêté sur l'année de démarrage des travaux et de mise en service de l'infrastructure.

Divers travaux se sont développés dans le prolongement des préconisations du rapport Lebègue, notamment au regard des évolutions intervenues dans le financement des projets publics. En effet, historiquement, les projets d'infrastructures de transports étaient dans la très grande majorité des cas entièrement financés par la puissance publique qui décidait ensuite de mettre en place ou non des péages d'utilisation de l'infrastructure, afin de faire participer l'usager au financement de cette infrastructure. Cependant de nouvelles questions se posent dès lors qu'il s'agit de montages financiers dans lesquels l'État n'est plus la seule partie prenante du projet (concessions, PPP). Le ratio VAN/euro public dépensé peut alors conduire à des classements différents du ratio VAN/euro dépensé.

À cet égard, Bonnafous, Jensen et Roy (2005[1]) appuient la préconisation du rapport Lebègue. Leur argumentation est dans un premier temps construite sur une simulation numérique étudiant la rentabilité socio-économique d'un programme d'investissements consistant à réaliser l'un après l'autre des projets d'infrastructure parmi 17 projets possibles, le tout sous une contrainte de disponibilité des fonds publics. Il en ressort que la chronique de choix d'investissements qui maximise la VAN globale du programme est celle qui suit le critère de classement par ratio de « VAN sur euros publics investis » décroissants. Les auteurs démontrent ensuite ce résultat par les méthodes de l'analyse linéaire, en recourant à un procédé virtuel de possibilité de fractionner des projets.

Cependant, Prud'homme et Kopp (2006)[2] critiquent le critère de choix de la VAN/euro public, qui ne tient compte que de la rentabilité du capital public et non de l'ensemble des ressources mobilisées. Ces auteurs reprochent à ce critère de choix d'omettre les dépenses d'investissements privées, elles aussi jugées comme « *rares*[3] *»)* ; ils préconisent ainsi de retenir le critère de choix rapportant le bénéfice social net actualisé (la VAN) au montant total de dépenses (publiques et privées). Ils concèdent uniquement que ces deux critères de choix se rejoignent *(i)* lorsqu'un projet est entièrement financé par le public et/ou *(ii)* qu'il n'existe pas de contrainte de rareté sur les fonds privés.

3.3 Coût fictif de rareté des fonds publics : les travaux du Prédit

En 2007 a été publié sous l'égide du PREDIT[4] un ouvrage intitulé « *Le calcul économique dans le processus de choix collectif des investissements de transport*[5] », rassemblant des travaux coordonnés par Yves Crozet et Joël Maurice. Cet ouvrage comprend plusieurs parties, dont une intitulée « *Des projets à la programmation des investissements* ». Cette partie comprend elle-même trois contributions. Ces trois

(1) Bonnafous, Jensen, Roy (2005), « *Le co-financement usager-contribuable et le partenariat public-privé changent les termes de l'évaluation des programmes d'investissement public.* », Economie et Prévision 175-176, 2006/4-5.
Bonnafous, Roy (2007) « Evaluation, financement et programmation des investissements », dans « Le calcul économique dans le processus de choix collectif des investissements de transport », éditeurs J. Maurice et Y. Crozet, Prédit, Economica.
(2) Prud'homme, Kopp (2006), « *Projets en PPP, contrainte budgétaire et choix d'investissements* », revue d'économie politique, n°3.
(3) Tout au moins, il y aurait plus d'investissements rentables que de capital privé à la recherche d'investissements rentables.
(4) Programme de recherche sur les transports terrestres.
(5) Maurice et Crozet, coordonnateurs (2007) « Le calcul économique dans le processus de choix collectif des investissements de transport », PREDIT, Economica.

contributions poursuivent une problématique commune, visant à hiérarchiser un ensemble de projets, de façon à maximiser la valeur-actualisée nette de cet ensemble, sous la contrainte d'un rationnement des fonds publics. Elles adoptent pour cela un procédé commun, consistant à imaginer que chaque projet pourrait « par la pensée » être fractionné sur un certain nombre d'années, puis à appliquer les méthodes de l'optimisation sous contrainte.

Due à Bonnafous et Roy, la première contribution, appelée « *Evaluation, financement et programmation des investissements* », reprend et développe les recommandations précitées de Bonnafous, Jensen et Roy (2005) en faveur de la hiérarchisation des projets par ordre décroissant du ratio VAN par euro public investi.

La deuxième contribution, due à Emile Quinet et Alain Sauvant, est appelée « *Méthode d'optimisation des programmes d'investissements de transport* ». Reprenant une idée de Quinet (2005)[1], les auteurs appliquent l'algorithme de programmation linéaire du *simplexe* d'abord à un ensemble instrumental de projets – pour tester la méthode et en analyser la sensibilité, puis à un ensemble d'une vingtaine de projets ferroviaires de lignes nouvelles envisagées (à l'époque) par Réseau Ferré de France (RFF), dans la cadre du CIADT[2]. Le modèle détermine le programme optimal, c'est-à-dire la liste des projets retenus, la date de mise en service de chacun, la VAN[3] de chaque projet et la VAN de l'ensemble du programme. Le procédé de fractionnement aboutit à concentrer la réalisation de chaque projet en une période unique (une seule année, ou deux années consécutives), dont il précise la date. La hiérarchisation des projets est sensible à la chronique des enveloppes de fonds publics disponibles.

En comparant la hiérarchisation obtenue et celle qui proviendrait de l'usage d'un des autres indicateurs usuels de rentabilité (VAN, TRI, VAN/fonds publics, taux de rentabilité immédiate, etc.), on constate qu'aucun d'eux ne permet un classement optimal. Certains indicateurs apparaissent néanmoins comme meilleurs que d'autres ; en particulier, l'écart à l'optimum est croissant lorsque l'on considère successivement le taux de rentabilité immédiate socio-économique (meilleur *proxy*), le taux de rentabilité interne socio-économique, le ratio VAN/fonds publics, le taux de rentabilité immédiate financière. Résultat complémentaire de la méthode du *simplexe* : elle calcule pour chaque enveloppe annuelle de fonds public une « variable duale[4] », qui mesure la rareté des fonds publics.

La troisième contribution, de J. Maurice, est intitulée « *Choix des projets sous contrainte budgétaire annuelle : un essai de récapitulation* ». Apportant un éclairage théorique à la démarche suivie par Quinet et Sauvant, elle met en évidence le rôle que peuvent jouer les multiplicateurs annuels précités, appelés « prix fictifs de rareté des fonds publics φ_t ». En effet, pour un projet donné, si dans le calcul du « bénéfice socio économique actualisé à l'origine[5] des temps (BOT) » – tel que recommandé par l'Instruction cadre de 2005 précitée on multiplie tout euro public net dépensé l'année

(1) Quinet E. (2005), "*Quelques réflexions à propos du rapport Lebègue*", revue Transports, n°432 juillet-août 2005.
(2) Comité Interministériel de l'Aménagement et du Développement du Territoire.
(3) En fait d'une part le bénéfice socio-économique, d'autre part la VAN de l'opérateur.
(4) C'est le "multiplicateur de Lagrange". Ce nombre est égal à l'augmentation que l'on observerait sur l'objectif (à savoir : la valeur actualisée nette de l'ensemble du programme optimisé) si l'on ajoutait 1€ à l'enveloppe des fonds publics disponibles.
(5) En prenant par exemple comme origine du temps le 1er janvier 2013.

t par $(1+\varphi_t)$, on calcule ainsi un « bénéfice socio-économique ***fictif*** actualisé à l'origine des temps $(BFOT)$ ». L'article montre que si, sous contrainte des enveloppes annuelles de fonds publics, on maximise par programmation linéaire la *somme* des $BFOT$ de tous les projets du programme, alors le théorème de Kuhn et Tucker entraîne que le résultat désignera l'ordre optimal et la date optimale de réalisation optimale des différents projets et que, pour chaque projet, cette date optimale de réalisation est celle qui maximise son propre $BFOT$. Il en résulte que, si la puissance publique était en mesure d'afficher la chronique des « prix fictifs de rareté des fonds publics φ_t » (comme elle affiche le taux d'actualisation et le $COFP$), alors il serait possible de « décentraliser les choix des projets », chaque maître d'ouvrage étant invité à prendre comme critère la maximisation du $BFOT$ de son projet (y compris bien entendu la recherche de l'année de réalisation qui maximise ce $BFOT$).

3.4 Conséquences de la prise en compte du prix fictif annuel de rareté des fonds publics φ_t

L'introduction de prix fictifs de rareté des fonds publics a un certain nombre de conséquences sur les critères de justification et d'optimisation des projets.

a) Recommandation du rapport Lebègue.

La recommandation du rapport Lebèque consiste à classer les projets selon le ratio (VAN/ somme actualisée des fonds publics nets).

L'instruction cadre des 25 mars-27 mai 2005 précise[1] : « *la VAN peut être calculée sans intégrer directement le coût d'opportunité des fonds publics, mais en s'assurant que la valeur actualisée nette ainsi calculée (sans prise en compte du coût d'opportunité des fonds publics) par euro public dépensé[2] est supérieure ou égale au coût d'opportunité des fonds publics* », c'est-à-dire en fait au facteur λ (supposé constant dans le temps).

La recommandation du rapport Lebègue revient donc à considérer que pour qu'un projet soit justifié, il est **nécessaire** que le ratio (VAN pure/ somme actualisée des fonds publics nets) soit supérieur ou égal à λ. La question de savoir si cette condition est **suffisante** sera examinée plus loin.

Cependant que devient la recommandation si, en plus du coût d'opportunité des fonds publics λ, un rationnement des fonds publics conduit à prendre en compte un prix fictif annuel de rareté des fonds publics φ_t ?

Dans ce cas, pour qu'un projet soit justifié du point de vue socio-économique, une condition est **nécessaire** est que son $BFOT$ (bénéfice fictif actualisé à l'origine des temps) soit positif ou nul. Or le $BFOT$ n'est autre que la VAN fictive, **après** incorporation des deux majorations de dépenses publiques nettes, respectivement

(1) Annexe III, paragraphe 3.

(2) Le ratio recommandé par le rapport Lebègue a donc pour numérateur la valeur nette actualisée « pure » et au dénominateur la somme actualisée des dépenses publiques nettes.

par le facteur λ relatif au coût d'opportunité des fonds publics **et** par le facteur annuel φ_t relatif à la rareté des fonds publics. A tout euro public de dépense nette attachée au projet, on ajoute la somme de l'effet distorsif précédemment cité λ € ainsi que l'effet de rareté de l'année donnée φ_t €. **Autrement dit, les coefficients λ et φ_t s'ajoutent : 1 euro de fonds publics net, l'année t devrait être compté pour** $(1+\lambda+\varphi_t)$ (voir encadré 6).

Encadré 6 - Relation entre le COFP et le PFRFP

On note :

- **X**, le montant des prélèvements obligatoires consacrés au financement des projets.
- **V(X)**, la valeur ajoutée de l'ensemble des projets. On suppose que **V'(X)** est positif (l'augmentation des prélèvements permet toujours de financer des projets rentables d'un point de vue collectif) et que **V''(X)** est négatif (comme les projets les plus rentables sont réalisés en premier, la rentabilité collective d'un projet supplémentaire est décroissante avec l'augmentation des prélèvements).
- **W(X)**, la désutilité monétarisée des prélèvements obligatoires. On suppose que **W'(X)** est positif (plus les prélèvements s'accumulent, plus le système fiscal dans son ensemble est distorsif) et que **W''(X)** est aussi positif (comme vu dans l'encadré 1, la désutilité d'un euro supplémentaire de prélèvement est croissante).

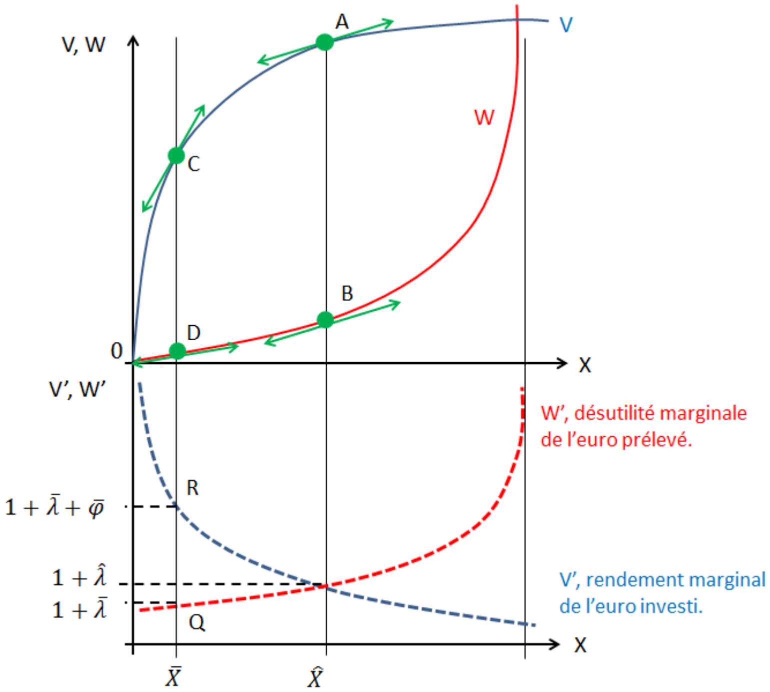
On obtient le graphique présenté dans la figure 2.

Sans contrainte sur le montant des prélèvements obligatoires mobilisables, le montant optimal de prélèvements obligatoires $\hat{X}$ est obtenu en maximisant la longueur du segment [AB] soit la quantité $(V(X) - W(X))$, ce qui implique que $(V'(\hat{X}) = W'(\hat{X}))$. Dans le plan de la figure 2 représentant V' et W', il s'agit du point d'intersection entre les courbes. En ce point, la désutilité marginale des prélèvements et l'utilité marginale de l'euro investi valent tous deux $1 + \hat{\lambda}$.

En présence de contraintes sur les prélèvements obligatoires mobilisables, leur montant est fixé de manière discrétionnaire – à tort ou à raison, dans le but de réduire les dépenses publiques ou encore de réduite l'endettement – à un montant $\bar{X}$, a priori inférieur à $\hat{X}$. A ce niveau de prélèvements, on vérifie que la pénibilité marginale du prélèvement est plus faible qu'à l'optimum tandis que la valeur ajoutée marginale du prélèvement y est plus élevée.

Afin de sélectionner les projets dont la réalisation ne nécessitera effectivement pas plus d'argent public que de prélèvements obligatoires mobilisables, il convient que chaque euro public investi soit pondéré par un coefficient égal à $(1 + \bar{\lambda} + \bar{\varphi})$.
Si l'on a déjà incorporé dans la mesure de la valeur ajoutée des projets un coefficient $1 + \lambda$ en multiplicateur des fonds publics, il faut y ajouter un coefficient φ de telle sorte que $(1 + \lambda + \varphi) = (1 + \bar{\lambda} + \bar{\varphi})$. Au coefficient introduit dans l'analyse coûts-avantage pour mesure la désutilité économique associée aux prélèvements on ajoute donc un second coefficient *ad hoc*, d'une nature instrumentale. Dans le cadre de la prise de décision, c'est bien la somme de ces deux coefficients qui importe.

Figure 2 – Prélèvement optimal endogène et prix fictif de rareté des fonds publics



Source : Graphique des auteurs

b) Recherche de la date optimale de réalisation d'un projet.

La date optimale de réalisation d'un projet est celle qui maximise son $BFOT$, autrement dit sa valeur nette actualisée à l'origine des temps après incorporation des deux majorations des dépenses publiques nettes, respectivement par le facteur (constant) λ relatif au coût d'opportunité des fonds et par le facteur annuel φ_t relatif à la rareté des fonds publics (voir encadré 7).

En l'absence de rareté des fonds publics, cette date optimale est – comme on l'a rappelé[1], l'année pour laquelle le **taux de rentabilité immédiate est égal au taux d'actualisation.**

L'application de cette règle subsiste en calculant le taux de rentabilité immédiate compte tenu du coût d'opportunité des fonds publics λ (supposé constant dans le temps).

Si le prix fictif annuel de rareté des fonds publics φ_t varie avec que l'année t, alors la détermination de la date optimale de réalisation conduit à un critère formellement un peu moins simple que la règle habituelle.

Toutefois, si le taux de rareté des fonds public était constant et égal à $\boxed{\varphi}$, on retrouverait cette règle habituelle, à condition de multiplier tout euro de dépenses publique nette par le facteur $(1+\lambda+\varphi)$, c'est-à-dire à condition d'ajouter à la majoration λ due au coût d'opportunité des fonds publics (déjà supposée prise en

(1) Abraham et Laure, *jam.cit.*

compte dans le calcul) la majoration φ relative à la rareté des fonds publics. La date optimale de réalisation serait celle pour laquelle le taux de rentabilité immédiate « fictif », calculé en incorporant ces deux majorations des fonds publics nets utilisés, serait être égal au taux d'actualisation.

Encadré 7 - Date optimale de réalisation d'un projet
Que devient le taux de rentabilité immédiate ?

Soit un projet donné.

Notations

r taux d'actualisation

0 instant pris comme origine des temps (ex : 1er janvier 2013)

t date de l'année calendaire, à partir de l'origine des temps

t_0 date d'achèvement du projet (mise en service le 1er janvier de l'année t_0+1)

I coût de l'investissement supposé réalisé au cours de l'année t_0 (et supposé indépendant de t_0)

a_t avantage socio-économique net procuré par le projet à la collectivité à la date t (et supposé indépendant de t_0)

B bénéfice socio-économique, actualisé à la date t_0

BOT bénéfice socio-économique ainsi calculé est actualisé à la date 0 : $BOT = \frac{B}{(1+r)^{t_0}}$

DPI dépense publique DPI au titre de l'investissement

DPE_t dépense publique au titre de l'exploitation à la date t

φ_t prix fictif de rareté des fonds publics l'année t

$BFOT(t_0)$ bénéfice socio-économique fictif, actualisé à l'origine des temps, le projet étant supposé réalisé l'année t_0

Il faut retarder la réalisation du projet de l'année (t_0-1) à l'année t_0 si et seulement si la variation du bénéfice actualisé à l'origine des temps est positive.

- **Cas hors contrainte sur les fonds public : règle du taux de rentabilité immédiate**

Il faut retarder le projet si et seulement si :

$$BOT_{t_0} - BOT_{t_{0-1}} = \frac{r.I - a_{t_0}}{(1+r)^{t_0}} \geq 0$$

- **Cas avec contrainte annuelle sur les fonds public (prix fictif de rareté des fonds publics) :**

Il faut retarder le projet si et seulement si :

$$BFOT_{t_0} - BFOT_{t_0-1} = \frac{\left[r.I - \left(\varphi_{t0} - (1+r).\varphi_{t_0-1}\right).DPI\right] - \left[a_{t_0} - \varphi_{t_0}.DPE_{t_0}\right]}{(1+r)^{t_0}} \geq 0$$

Nota : si le prix fictif de rareté des fonds publics est constant et égal à φ, la condition précédente devient :

$$BFOT_{t_0} - BFOT_{t_0-1} = \frac{[r.(I+\varphi.DPI)] - [a_{t_0} - \varphi.DPE_{t_0}]}{(1+r)^{t_0}} \geq 0$$

Autrement dit, les dépenses publiques relatives à l'investissement et aux avantages nets annuels, qui sont déjà majorées du facteur λ (au titre du COFP), doivent en outre être majorées du facteur φ (au titre de la rareté des fonds publics). On retrouve dès lors le critère de rentabilité immédiate.

Ajoutons que le prix fictif annuel de rareté à toutes chances d'être variable avec l'année t, en fonction notamment du programme intertemporel de maîtrise des finances publiques[1].

Plus généralement, il convient de souligner que la chronique des prix fictifs de rareté des fonds public est en fait endogène : elle dépend d'une part de la chronique des enveloppes de fonds publics et, d'autre part de la liste des projets candidats et des caractéristiques socio-économiques de chacun de ses projets (coûts, avantages, part des uns et des autres financées sur fonds publics).

3.5 Pistes d'action

Compte tenu de ce qui précède, trois approches de mise en œuvre paraissent se dégager.

a) Approche centralisée

La première approche consisterait à mettre en œuvre à grande échelle la méthode déjà explorée par Quinet et Sauvant, à savoir :

- expliciter la chronique des enveloppes annuelles de fonds publics à respecter ;
- dresser la liste des projets candidats au programme d'optimisation ;
- préciser pour chacun d'eux : le montant de l'investissement, le montant des avantages socio-économiques annuels, le montant des contributions annuelles nettes de fonds publics au projet ;
- appliquer l'algorithme du *simplexe*, qui donnera l'ordre optimal de réalisation des projets et la date optimale d'achèvement de chacun d'entre eux ; en profiter pour expliciter le « prix fictif de rareté des fonds publics » associé à chaque contrainte annuelle ; en profiter aussi pour calculer chacun des ratios auxiliaires (taux de rentabilité interne, ratio VAN/fonds publics, etc.).

(1) On trouvera dans Maurice, *jam. cit.*, l'examen du cas d'école où les pouvoirs publics pourraient optimiser la trajectoire de leurs emprunts à taux d'intérêt réel i. On trouve alors que la chronique du prix fictif de rareté des fonds publics φ_t devrait alors prendre la forme d'une suite géométrique de raison $\frac{1+r}{1+i}$.

b) Approche décentralisée

Cette deuxième approche consisterait à annoncer officiellement, par exemple par voie d'Instruction cadre, une chronique de « prix fictifs de rareté des fonds publics φ_t », que chaque maître d'ouvrage devrait ensuite utiliser pour calculer le « bénéfice socio-économique fictif à l'origine des temps » de chacun de ses projets, avec comme instruction de chercher à maximiser ce $BFOT$ (date optimale, variante optimale, etc).

Tout le problème est bien entendu de déterminer « au mieux » cette chronique de prix fictifs de rareté des fonds publics φ_t. Des exercices de simulation comme ceux effectués par Quinet et Sauvant pourraient éclairer ce choix, sans pour autant nécessiter de centraliser la totalité des projets et des informations les concernant.
En revanche les maîtres d'ouvrage devraient faire parvenir leurs évaluations socio-économiques à un organisme collecteur central qui pourrait en tirer des informations précieuses permettant de réviser à intervalles réguliers (tous les 5 ans) la chronique des prix fictifs de rareté des fonds publics.

Dans le cadre de la Commission Quinet, un premier ordre de grandeur des $\boldsymbol{\varphi_t}$ pourrait être tiré des travaux de Quinet et Sauvant puis, compte tenu des contraintes propres à la période actuelle, ces coefficients devraient être ré-estimés. Ces ré-estimations supposeraient de connaître le montant des fonds publics disponibles chaque année à horizon de 30 ans ou, à défaut, de proposer des hypothèses communes pour l'évaluation des projets.

c) Approche hybride

La troisième et dernière approche, à caractère hybride, comporterait deux étapes, la première décentralisée, la deuxième centralisée.

Étape décentralisée

Le maître d'ouvrage de chaque projet procèderait à l'évaluation socio-économique de son projet en appliquant uniquement le COFP, c'est-à-dire en multipliant par $1+\lambda$ chaque euro public de dépense nette attachée ledit projet. Il optimiserait son projet : variante, dimension, date de réalisation. Tout projet dont le bénéfice socio-économique à l'origine des temps serait positif (ou nul) serait ainsi présélectionné et transmis à l'échelon central, avec toutes les données justificatives.

Étape centralisée

La programmation des investissements financés sur fonds publics, dans la limite d'enveloppes annuelles de fonds publics disponibles fixées par les autorités publiques, serait confiée à un organisme central. Cet organisme recueillerait l'ensemble des projets présélectionnés issus de la première étape. À cette « short-liste », il appliquerait une méthode de programmation sous contrainte -par exemple l'algorithme du *simplexe*- afin de sélectionner les projets permettant de maximiser le bénéfice socio-économique global à l'origine des temps, sous contrainte des enveloppes annuelles de fonds publics disponibles. Cette programmation pourrait le cas échéant être effectuée dans plusieurs scénarios d'évolution des enveloppes budgétaires.

Cette programmation devrait être faite dans la transparence vis-à-vis de l'échelon décentralisé et vis-à-vis des parties concernées (administrations locales et centrales, partenaires sociaux, etc.)

Remarque terminal

En toute rigueur, la méthode hybride comporte par rapport aux deux autres méthodes un risque de biais. En effet, chaque projet est censés être optimisés au niveau décentralisé sur la base du λ seul, et non $\lambda + \varphi_t$; en toute théorie, la dimension du projet présélectionnée, optimisée à l'échelon décentralisée, est donc supérieure à la dimension optimale que fourniraient les deux première méthodes. On peut toutefois estimer que ce biais est négligeable. Si l'on le jugeait néanmoins indispensable (grands projets), on pourrait raffiner le dimensionnement à l'échelon central, sous réserve de disposer des données détaillées du projet.

Complément

La méthode de sélection des projets par application de la programmation linéaire sous contraintes annuelles budgétaires repose sur l'hypothèse que la taille de chaque projet candidat est déterminée *a priori*. Cela semble de bon sens lorsqu'il s'agit d'autoroutes, de voies ferrées, etc., dont les dimensions sont « discrètes » (nombre de voies, etc.). Néanmoins, on peut imaginer que la taille de chaque projet possède une certaine marge de malléabilité, même dans le cas précité (rayons de courbure, pente, nombre d'arrêts, etc.). Que devient la programmation sous contraintes budgétaires si les projets sont malléables ? Quel est l'arbitrage optimal entre taille et nombre des projets à sélectionner ? Tel est l'objet de la contribution qui suit.

Résumé

Soit N projets candidats, chacun caractérisé par la VAN-SE qu'il procure en fonction des fonds publics x qui lui sont attribués.

Si ces projets étaient tous distincts, il existerait *a priori* 2^N façons de les combiner. Si certains projets étaient identiques, le nombre de combinaisons se réduirait. Ce nombre serait ramené à $(N+1)$ dans le cas extrême où tous les projets seraient identiques.

Le problème consiste à rechercher parmi toutes les combinaisons celle qui permet de maximiser la VAN-SE globale des projets retenus, et à déterminer en même temps la dimension optimale de chacun d'eux (et, bien entendu, leur nombre).

Si l'on adopte une approche coût-efficacité, c'est-à-dire si on considère une enveloppe X exogène de fonds publics disponibles, on est alors en mesure de déterminer pour chaque valeur de X la combinaison optimale. Lorsque X croît, on change de combinaison optimale pour certaines valeurs de transition bien précises ; lorsque X augmente entre deux valeurs de transition successives, la combinaison optimale ne change pas (nombre de projets et leur numéro), mais l'ajustement se fait par une augmentation de la taille de chacun de ces projets sélectionnés. On peut ainsi calculer la VAN-SE globale maximale $V(X)$ et la VAN-SE marginale $V'(X)$ par euro public de dépense nette, et tracer leurs courbes représentatives appelées respectivement Γ et Γ' ; ces courbes se composent d'arcs. Pour chaque valeur de transition de X, la courbe Γ est continue, mais la courbe Γ' est discontinue (voir figure 1)

Si on adopte une approche coût-avantage, c'est-à-dire si on considère qu'à chaque enveloppe X de fonds publics est associée une perte d'utilité sociale $W(X)$ (triangle de Harberger), il convient alors de rechercher la valeur de X qui maximise la différence (supposée positive) $[V(X)-W(X)]$. La valeur de la dérivée $W'(X)$ est assimilable au facteur λ qui apparaît dans le coût d'opportunité des fonds publics $(1+\lambda)$. On peut représenter graphiquement la fonction $W(X)$ et sa dérivée $W'(X)$ respectivement par des courbes appelées Ψ et Ψ' (voir figure 2). On montre que le coût d'opportunité des fonds publics endogène est nécessairement croissant avec X.

Il reste que l'enveloppe discrétionnaire des fonds publics disponibles peut être inférieure (ou, en cas de relance keynésienne, supérieure) au coût d'opportunité endogène des fonds publics, ce qui fait apparaître un prix fictif de rareté des fonds public φ (éventuellement négatif), égal à $[V'(X)-W'(X)]$.

L'enveloppe des fonds publics disponible est supposée successivement exogène (§1) et endogène (§2).

1. Enveloppe des fonds publics disponibles supposée exogène (approche coût efficacité)

Notations

X enveloppe exogène des fonds publics disponibles, avec $X \geq 0$,

i numéro d'un projet candidat, variant de 1 à $\boxed{N}$

x_i fonds publics utilisés pour le projet i, avec $x_i \geq 0$

$v_i(x_i)$ la VAN-SE[1] procurée par le projet, avec $v_i(x_i) \geq 0$, **calculée avant toute correction pour coût d'opportunité ou de rareté des fonds publics (chaque euro public est compté pour 1)**.

On examine successivement deux cas d'école extrêmes : celui où tous les projets candidats seraient **distincts** (§1.1), puis celui où ils seraient tous **identiques** (§1.2).

Dans les deux cas, an procède en deux étapes :
- on se fixe d'abord de façon **exogène** le nombre de projets,
- puis on cherche le nombre optimal, **endogène**, de projets.

1.1. Cas où les projets candidats seraient tous distincts

On suppose d'abord que tous les projets éligibles sont **distincts**, ne serait-ce que par leur « immatriculation ».

1.1.1. Première étape : supposons d'abord comme exogène et égal à n le nombre des projets

Les combinaisons distinctes comportant chacune n projets sont alors au nombre de :

$$C_N^n = \frac{N!}{n!.(N-n)!} \qquad (1)$$

A. Considérons tout d'abord la combinaison des projets dont les numéros sont 1,2,3... n.

Quelle est la taille optimale de chacun de ces projets ?

Elle est solution du Lagrangien suivant :

$$\Lambda(x_i, \mu_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i) + \mu_n . \left(X - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \qquad (2)$$

(1) VNA-SE : valeur nette actualisée socio-économique, identique à ce qui est défini sous le nom de « bénéfice socio-économique » dans l'*Instruction cadre relative aux méthodes d'évaluation économique des grands projets d'infrastructures de transport* (25 mars 2004 et 27 mai 2005).

Conditions du premier ordre :

$v_i'(x_i) = \mu_n$ pour chaque i (3)

Interprétation : la « VAN-SE marginale par euro public » de chacun des n projets considérés doit prendre la même valeur μ_n

Conséquence : $x_i = v_i'^{-1}(\mu_n)$ (4)

La valeur $\mu_n(X)$ recherchée est alors solution de[1] : $\sum_{i=1}^{n} v_i'^{-1}(\mu_n) = X$ (5)

En reportant dans (4) la solution $\mu_n(X)$ de (5), on obtient la **taille optimale** de chaque projet i , notée $x_i(\mu_n(X))$ (6)

Pour cette combinaison des projets numéros 1,2, , n, la VAN-SE atteint alors un maximum « local », égal à : $V_n(X) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i(\mu_n(X)))$ (7)

Ce maximum « local », propre à la combinaison considérée, est évidemment une fonction (croissante) de X.

B. Autres combinaisons de n projets et sélection de la meilleure

Pour chacune des C_N^n combinaisons comportant n projets, il faut ensuite transposer les calculs ci-dessus de façon à calculer son maximum « local », puis parmi ces C_N^n maximums locaux, sélectionner le plus élevé, noté $\boxed{\hat{V}_n(X)}$ (8)

Ce processus détermine ainsi simultanément : la VAN-SE maximale que, étant donné l'enveloppe X des fonds publics disponibles, l'on peut atteindre avec une combinaison comportant n projets, la combinaison optimale notée $\hat{C}_N^n$ (c'est-à-dire l'immatriculation des n projets qui composent cette combinaison optimale) et la taille optimale de chacun des projets ainsi sélectionnés.

1.1.2. Deuxième étape : détermination de l'*optimum optimorum*

Il faut enfin faire varier n de 0 à N, calculer pour chacune de ces $(N+1)$ valeurs le $\hat{V}_n(X)$ correspondant, puis sélectionner la valeur de $\boxed{\hat{n}(X)}$ donnant $\boxed{V(X) = Max_n\ \hat{V}_n(X)}$. (9)

(1) Remarque : on peut à l'inverse se donner *a priori* la valeur de μ_n, VAN-SE marginale commune à chacun des projets, et calculer par (4) la valeur $X(\mu_n)$ de l'enveloppe des fonds publics nécessaires, optimisée pour les n projets retenus considérés.

Cet *optimum optimorum* fournit à la fois le nombre optimal $\hat{n}(X)$ de projets, l'immatriculation de chacun des projets retenus et la taille optimale de chacun de ces projets.

1.1.3. Remarques

A. Le nombre de combinaisons examinées au cours de ce processus de sélection en deux étapes atteint ainsi au total $\sum_{n=0}^{N} C_N^n = 2^N$, ce qui peut être colossal et nécessite de gros moyens de calcul, sauf à trouver des algorithmes plus performants (comme celui du *simplexe* en cas de fonctions linéaires).

B. Il peut y avoir plusieurs solutions, notamment si certains projets sont en fait identiques (c'est-à-dire ne se distinguent que par leur numéro d'immatriculation), ce que l'on examinera plus précisément plus loin.

1.1.4. Exemple simplifié

Considérons le cas très simplifié où le projet i aurait une équation de la forme[1] :

$v_i(x) = 0$ si $0 \leq x_i < a_i$ et $\boxed{v_i(x) = b_i.(x_i - a_i)^{\sigma}}$ si $x_i > a_i$, avec : $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ (10)

Nota : le terme a_i, s'il est strictement positif, s'interprète comme un coût fixe (en fonds publics).

On suppose en outre que l'élasticité est **indépendante de** i (hypothèse forte) et telle que $\boxed{0 < \sigma < 1}$, On simplifie plus encore, ce qui allège les calculs, en posant $\boxed{\sigma = 1/2}$

Dérivée : en s'en tenant au cas $x_i > a_i$, de (10) on tire $v_i'(x_i) = \frac{1}{2}\frac{b_i}{\sqrt{x_i - a_i}}$ (11)

Dans ces conditions, l'équation (3) s'écrit :

$$\frac{1}{2}\frac{b_i}{\sqrt{x_i - a_i}} = \mu_n \quad \Leftrightarrow \quad x_i = a_i + \frac{b_i^2}{4.\mu_n^2} \qquad (12)$$

l'équation (5) devient : $$X = \sum_i a_i + \frac{\sum_i b_i^2}{4.\mu_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_n = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\sum_i b_i^2}{X - \sum_i a_i}} \qquad (13)$$

On pourrait alors représenter graphiquement chaque combinaison par un point de coordonnées $\sum_i a_i$ et $\sum_i b_i^2$. On n'explorera pas plus avant cette voie relative au

(1) On pourrait également examiner une autre présentation simple pour laquelle on aurait :

$v_i(x) = 0$ si $0 \leq x_i < 1 + a_i$ et $v_i(x) = b_i\left[1 - \frac{(x_i - a_i)^{-\sigma}}{\sigma}\right]$ si $x_i > a_i$, avec : $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$

L'élasticité est supposée indépendante de i (hypothèse forte), avec $\sigma > 0$, On simplifie plus encore, ce qui allège les calculs, en posant $\sigma = 1$

cas où tous les projets seraient distincts, pour aborder le cas extrêmement simplifié où ils seraient tous identiques.

1.2. Cas où les projets candidats seraient tous identiques

Les cas possibles sont ceux où le nombre de projets est égal respectivement à 0, 1, 2, …, N, c'est-à-dire $(N+1)$ cas, au lieu de 2^N, ce qui, dès que N est relativement grand, représente une réduction considérable du nombre de cas à passer en revue.

1.2.1. Supposons que nombre exogène des projets « retenus » soit égal à $\boxed{n \leq N}$

Il est clair que la taille de chaque projet retenu est égale à $x = \dfrac{X}{n}$ (14)

Supposons de plus comme précédemment que la fonction VAN-SE prend la forme très simplifiée :

$v(x) = 0$ si $0 \leq x < a$

et $\boxed{v(x) = b.\sqrt{x-a}}$ avec $x > a$ (15)

Dérivée de (15) : $v'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{b}{\sqrt{x-a}}$ (16)

qui tend vers $+\infty$ quand $x \to a^+$ et vers 0^+ quand $x \to +\infty$.

Il est clair que :

- si $0 \leq X < a$, l'enveloppe de fonds publics disponible ne permet de financer aucun projet : $\hat{n}(X) = 0$
- si $a \leq X < 2a$, l'enveloppe de fonds publics disponible permet de financer 1 projet et 1 seul : $\hat{n}(X) = 1$
- si $2a \leq X$: alors il faut comparer la solution avec 1 projet et la solution avec 2 projets. La solution avec 2 projets devient préférable dès que : $2.v\left(\dfrac{X}{2}\right) \geq v(X)$, ce qui s'écrit ici :
- $2.b.\sqrt{\dfrac{X}{2} - a} \geq b.\sqrt{X - a}$, dont la solution est : $\boxed{X \geq X_{1,2}}$ avec $\boxed{X_{1,2} = 3.a}$ (17)
- De même le passage de n à $n=1$ projets s'écrit : $(n+1).b.\sqrt{\dfrac{X}{n+1} - a} \geq b.\sqrt{\dfrac{X}{n} - a}$, dont la solution est : $\boxed{X \geq X_{n,n+1}}$ avec $\boxed{X_{n,n+1} = (2n+1).a}$ (18)

Résumé :

- Si $0 \leq X < a$, il ne faut faire aucun projet
- Si $a < X < 3.a$, il faut faire 1 seul projet, de taille X

- Si $3.a < X < 5.a$, il faut faire 2 projets (identiques), chacun de taille $(X/2)$
- Si $5.a < X < 7.a$, il faut faire 3 projets (identiques), chacun de taille $(X/3)$
- Etc….

Remarque sur la valeur de transition $X_{n,n+1} = (2n+1).a$

- **La fonction VAN-SE est continue, y compris au point de transition d'abscisse** $X_{n,n+1}$. En effet pour cette valeur, que l'on fasse n projets de taille $(X_{n,n+1}/n)$, ou $(n+1)$ projets (identiques), de taille $(X_{n,n+1}/(n+1))$, on obtient la même VAN-SE globale, à savoir :

$$n.b.\sqrt{\left(\frac{2.n+1}{n}-1\right).a} = \sqrt{n.(n+1).a} \text{ et } (n+1).b.\sqrt{\left(\frac{2.n+1}{n+1}-1\right).a} = \sqrt{n.(n+1).a} \quad (19)$$

- En revanche, en ce point de transition $X_{n,n+1}$, **la dérivée est discontinue** et il en va de même pour la **taille optimale des projets** :

- à gauche (c'est-à-dire pour $X \to X^-_{n,n+1}$) : (20)

(a) la dérivée vaut $v'\left(\frac{X_{n,n+1}}{n}\right)$ soit : $\frac{1}{2}.\frac{.b}{\sqrt{\left(\frac{2n+1}{n}-1\right)a}} = \frac{1}{2}.\frac{.b}{\sqrt{\frac{n+1}{n}a}}$

(b) la taille optimale $v\left(\frac{X_{n,n+1}}{n}\right)$ de chacun des n projets vaut : $b.\sqrt{\frac{n+1}{n}a}$

- à droite, (c'est –à-dire pour $X \to X^+_{n,n+1}$) : (21)

(a) la pente vaut $v'\left(\frac{X_{n,n+1}}{n+1}\right)$ soit : $\frac{1}{2}.\frac{.b}{\sqrt{\left(\frac{2n+1}{n+1}-1\right)a}} = \frac{1}{2}.\frac{.b}{\sqrt{\frac{n}{n+1}a}}$

(b) la taille optimale $v\left(\frac{X_{n,n+1}}{n+1}\right)$ de chacun des $(n+1)$ projets vaut : $b.\sqrt{\frac{n}{n+1}a}$

Résumé : lorsque l'enveloppe des fonds publics disponibles passe de $(X_{n,n+1} - \varepsilon)$ à $(X_{n,n+1} + \varepsilon)$:

- le nombre des projets passe de n à $n+1$,
- la VAN-SE globale est continue en sa valeur $\sqrt{n.(n+1).a}$
- la taille optimale de chaque projet diminue de $b.\sqrt{\frac{n+1}{n}a}$ à $b.\sqrt{\frac{n}{n+1}a}$,
- la VAN-SE marginale par euro public augmente de $\frac{1}{2}.\frac{.b}{\sqrt{\frac{n+1}{n}a}}$ à $\frac{1}{2}.\frac{.b}{\sqrt{\frac{n}{n+1}a}}$

Remarque : lorsque $n \to +\infty$, alors les expressions (20) et (21) convergent respectivement vers $\frac{1}{2}.\frac{.b}{\sqrt{a}}$ (dérivée, VAN-SE marginale par euro public)) et $b.\sqrt{a}$ (taille optimale de chaque projet).

1.2.2. Représentation graphique : voir figure 1

La courbe représentative de la fonction $v(x)$ est croissante et tourne sa concavité vers le bas pour $x \geq a$. Mais le terme a, s'il est strictement positif, créer une non-convexité.
Le point d'abscisse $X = n.x$ et d'ordonnée $V_n(X) = n.v(x)$ se déduit du point de coordonnées $[x, v(x)]$ par une **homothétie** de centre 0 et de rapport n.

Par suite, la courbe[1] $\boxed{(\Gamma)}$ **représentative de la VAN-SE globale maximale en fonction de l'enveloppe** X des fonds publics disponibles, est constituée des arcs jointifs successifs OA_1, A_1B_1, B_1B_2, B_2B_3, etc.

En dérivant par rapport à x à n constant, on obtient $\frac{dV_n(X)}{dX}.\frac{dX}{dx} = n.\frac{dv(x)}{dx}$, et comme $dX = n.dx$, il vient : $\frac{dV_n(X)}{dX} = \frac{dv(x)}{dx}$. Il en résulte que la pente de la courbe représentative de la fonction $V_n(X) = n.v(x)$ au point d'abscisse $X = n.x$ est égale à la pente de la courbe d'équation $v(x)$ au point d'abscisse x : la première courbe se déduit de la deuxième par une **affinité horizontale de rapport** n.

Par suite, la courbe représentative de la VAN-SE marginale optimisée est constituée des arcs disjoints successifs OA'_1, $M'_1m'_1$, $M'_2m'_2$, $M'_3m'_3$, etc.
Menons par O la tangente $\boxed{OT_1}$ à la courbe représentative de la fonction $v(x)$, T_1 étant le point de contact, d'abscisse z_1. Par construction, la pente t du segment OT_1 est égale à $v'(z_1)$, ce qui s'écrit :

$$\frac{v(z_1)}{z_1} = v'(z_1) \text{, soit ici : } \frac{b.\sqrt{z_1 - a}}{z_1} = \frac{1}{2}.\frac{b}{\sqrt{z_1 - a}} \text{ d'où : } z_1 = 2.a \qquad (22)$$

Par suite la pente de la tangente OT_1 est égale à : $t = v'(z_1) = \frac{b}{2.\sqrt{a}}$ (23)

De part l'homothétie précitée, la droite OT_1 est également tangente respectivement en T_2 , T_3, T_4 aux courbes représentatives des fonctions V_2, V_3, V_4, etc.

Interprétation : la droite représente la valeur maximale de la VAN-SE par euro public.

(1) Ainsi dénommée parce qu'elle joue le rôle d'une « courbe de demande » de financement public des projets.

Sur la courbe représentative des dérivées, le point m'_n d'ordonnée (19.a) et le point M'_{n+1} d'ordonnée (20.a) se situent de part et d'autre de l'horizontale d'ordonnée (23). Mais comme on l'a vu, en vertu de (18), lorsque $n \to \infty$, les deux points m'_n et M'_{n+1} se rapprochent asymptotiquement de l'horizontale d'ordonnée t donnée par (23).

2. Enveloppe des fonds publics disponibles supposée endogène

Rappelons que la valeur ci-dessus de la VAN-SE est censée prendre en compte le coût facial des fonds publics, mais ignore la perte d'utilité complémentaire induite (triangle de Harberger)[1].

Soit $W(X)$ la désutilité monétarisée **complémentaire** liée aux prélèvements obligatoires, non prise en compte dans le calcul de la VAN-SE
Il s'agit alors de choisir le couple (nombre, dimension) des projets de façon à maximiser l'écart $[V(X)-W(X)]$ - en se limitant au cas où cet écart maximum est positif (ou nul)-.

On commence par le cas de projets supposés tous identiques. On généralisera ensuite.

La comparaison peut se faire graphiquement. Sur la <u>figure 2</u>, on reprend la figure 1 que l'on complète en traçant la courbe représentative de la fonction $W(X)$.

2.1. Hypothèse d'un coût d'opportunité des fonds publics constant.

Supposons d'abord que le coût d'opportunité des fonds publics $(1+\lambda)$ est égal par exemple à 1,2, et qu'il est constant, c'est-à-dire indépendant de l'enveloppe X des fonds publics utilisés pour financer les projets. Autrement-dit : la désutilité complémentaire de tout euro public prélevé est supposée constante et égale à $\boxed{\lambda = 0{,}2}$.

Dès lors, la courbe représentative de la fonction $W(X)$ est la droite $\boxed{\Delta}$ de pente $\boxed{\lambda}$ passant par l'origine.

Il apparaît clairement que si la pente de cette droite est supérieur à celle de la tangente précitée $0T_1$, c'est-à-dire si $t < \lambda$, autrement-dit d'après (22) si $\frac{b}{2.\sqrt{a}} < \lambda$, alors la courbe Γ se situe au-dessous de la droite Δ quel que soit X. Il faut s'abstenir de tout projet.

Si en revanche $t = \lambda$, c'est à-dire d'après (22) si $\frac{b}{2.\sqrt{a}} = \lambda$, alors la droite Δ coïncide avec la tangente OT_1 à la courbe Γ. Tous les projets sont non-rentables, à l'exception des projets de taille $z_1 = 2.a$ (voir (2 3)), pour lesquels toutefois la VAN-SE est strictement égale à la désutilité monétarisée complémentaire des fonds publics nécessaires à son financement, donc la VAN-SE intégrant le coût complémentaire

(1) Voir Note précitée, encadrée 1.

d'opportunité des fonds publics est nulle. On peut réaliser un nombre quelconque de tels projets…. mais en vain.

Faisons maintenant pivoter progressivement la droite Δ vers le bas en supposant que la différence $(t-\lambda)$ croît à partir de 0. Il est clair (graphiquement) que l'écart $[V(X)-W(X)]$ est d'autant plus grand que X est grand. On a intérêt à faire un très grand nombre de projets, d'une taille qui est légèrement supérieure à $z_1 = 2.a$.

Remarque : Ce résultat montre que l'hypothèse d'un coût d'opportunité des fonds publics indépendants du montant des fonds publics prélevés est irréaliste. D'où l'hypothèse qui va suivre.

2.2. Hypothèse d'un coût d'opportunité des fonds publics croissant avec le montant des fonds publics prélevés.

Comme dans l'encadré 6 de la note précitée, on suppose maintenant que la fonction $W(X)$ est croissante et que, en outre, elle tourne sa concavité vers le haut, ce qui s'écrit : $W'(X) > 0$ et $W''(X) \geq 0$.

Sur la figure 2, la courbe représentative que la fonction $W(X)$ est alors de la forme Ψ et la courbe représentative de la fonction $W'(X)$ de la forme Ψ'.

Le maximum de l'écart $[V(X)-W(X)]$ est obtenu pour les points tels que $V'(X) = W'(X)$, c'est-à-dire pour les points d'intersection des courbes Γ' et Ψ'. Cette condition est nécessaire mais non suffisante : il faut vérifier qu'il s'agit bien de maxima locaux, puis choisir le plus grand d'entre eux.

Sur la figure 2, on obtient ainsi les points P_1 (un projet de taille $X(P_1)$), P_2 (deux projets chacun de taille $X(P_2)/2$), P_3 (trois projets chacun de taille $X(P_3)/3$). Il faut ensuite déterminer pour lequel de ces trois points la différence $[V(X)-W(X)]$ est maximale.

Le processus de maximisation -graphique ou par le calcul- détermine alors simultanément le nombre optimal des projets, la taille optimale de chaque projet, le montant de l'enveloppe des fonds publics nécessaires et –incidemment- le coût endogène d'opportunité des fonds publics correspondant.

2.3. Voies de généralisation

Les projets dans la réalité ne sont pas identiques.

Dans tous les cas, il faudrait construire l'analogue des courbes Γ et Γ'.

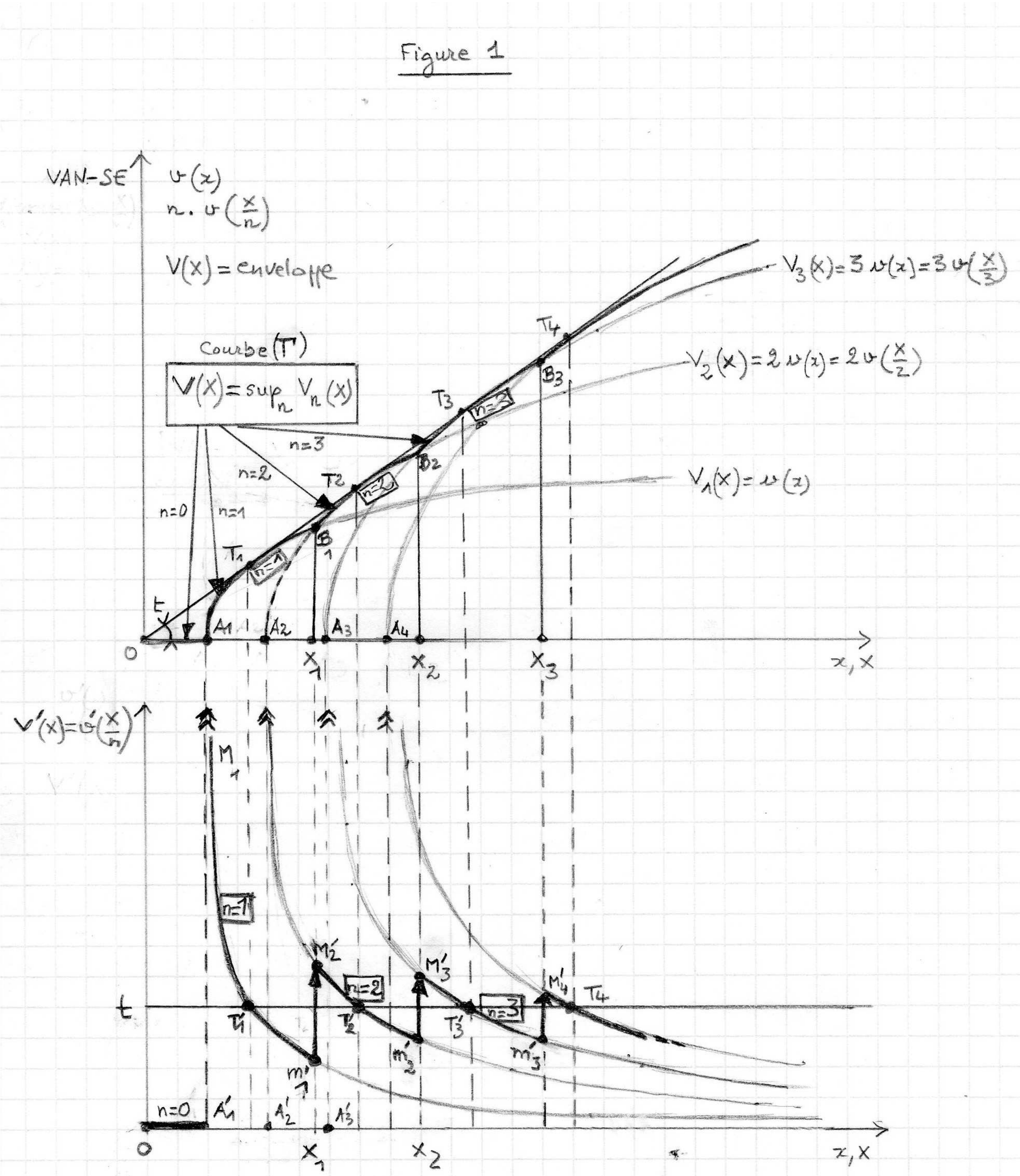
Dans le cas où tous les projets seraient distincts, il faudrait pour cela procéder comme esquissé au § 1.1. ci-dessus, ce qui déterminerait les « arcs » consécutifs de la courbe Γ (qui est continue), et des points de discontinuité pour la courbe Γ' des dérivées.
Il s'agirait ensuite de déterminer les intersections de la courbe Γ' et de la courbe $W'(X)$ et pour l'ensemble (discret) des valeurs de X ainsi obtenues, de déterminer celle qui maximise l'écart $[V(X)-W(X)]$.

2.4. Retour à une enveloppe discrétionnaire des fonds publics

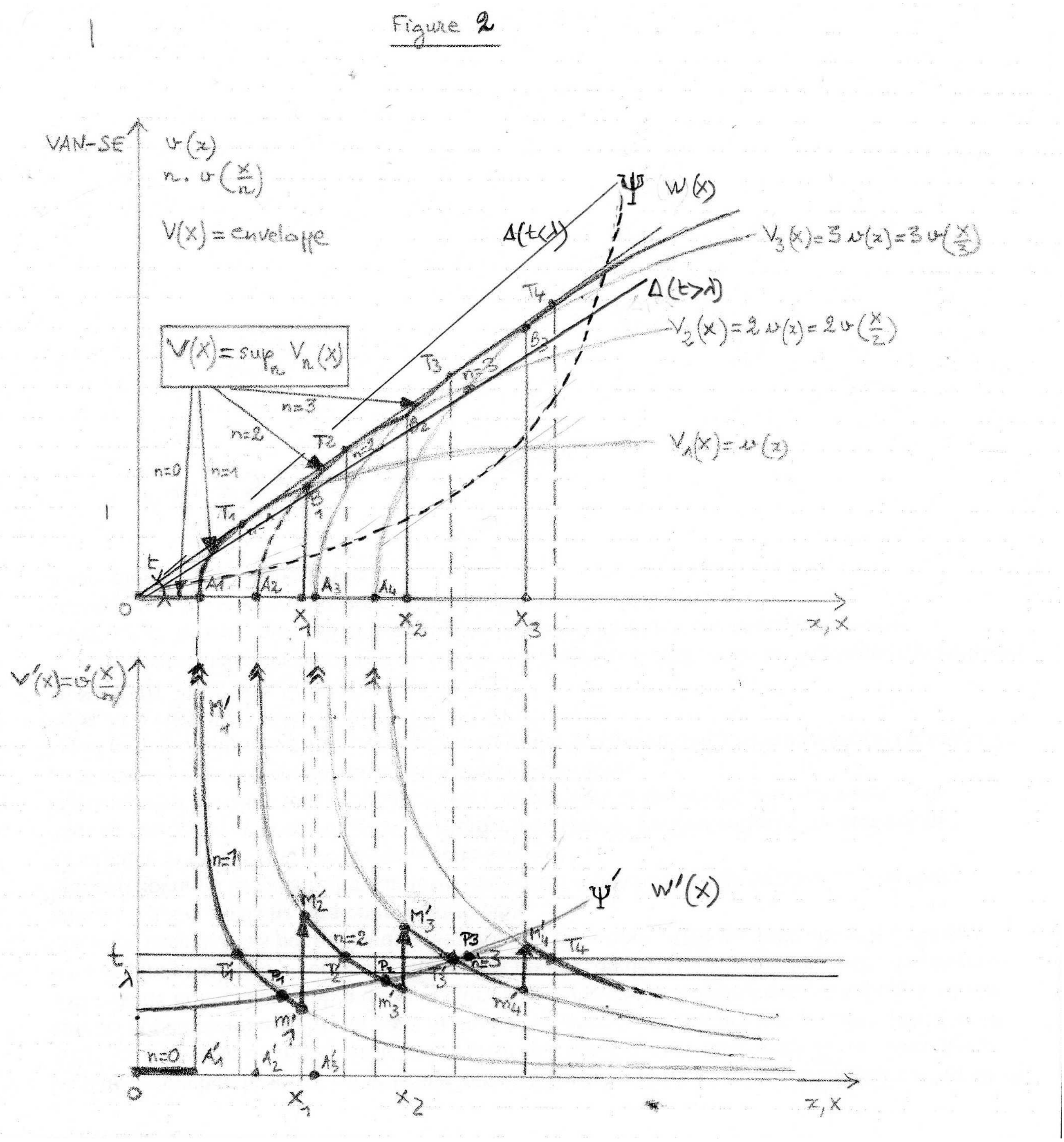
Si l'enveloppe discrétionnaire des fonds publics est inférieure à l'enveloppe endogène, on retrouve les résultats du §1 ci-dessus. La valeur de la pente de la courbe Γ est alors égale à $(\lambda+\varphi)$, où λ vaut $W'(X)$ et où φ est le prix fictif de rareté des fonds publics qu'il fait ajouter pour respecter l'enveloppe des fonds publics discrétionnairement réduite.

Remarque : il se peut, en période de relance keynésienne, que la puissance publique souhaite au contraire accroître le rythme des investissements publics, c'est-dire aller au-delà de l'enveloppe endogène des fonds publics, donc avoir un φ négatif.

* * * * *



Nota : dans ce cas simplifié, tous les projets éligibles sont supposés identiques



Nota : dans ce cas simplifié, tous les projets éligibles sont supposés identiques

Bibliographie

Abraham C. et A. Laure (1959) « *Etude du programme d'investissements routiers* », Annales des Ponts et Chaussées

Abraham C. (2007), « *Autoroutes à péage et coût implicite des fonds publics* », document non publié.

Allgood, Snow (1998), "*The marginal cost of raising tax revenue and redistributing income*", Journal of political economy.

Atkinson et Stern (1974), "*Pigou, taxation and public goods*", Review of economic studies.

Ballard et al. (1985), "*General equilibrium computations of the marginal welfare costs of taxes in the United States*", American economic review.

Beaud (2008), « *Le coût social marginal des fonds publics en France* », Annales d'Économie et de Statistique n° 90.

Bernard, Vielle (2003), "*Measuring the Welfare Cost of Climate Change Policies : A Comparative Assessment Based on the Computable General Equilibrium Model GEMINI-E3"*, Environmental Modeling & Assessment, Vol. 8 n° 3.

Browning (1987), "*On the marginal welfare cost of taxation*", American economic review.

Bonnafous, Jensen, Roy (2005), « *Le co-financement usager-contribuable et le partenariat public-privé changent les termes de l'évaluation des programmes d'investissement public.* », Economie et Prévision 175-176, 2006/4-5.

Bonnafous, Roy (2007) « *Evaluation, financement et programmation des investissements* », dans « *Le calcul économique dans le processus de choix collectif des investissements de transport* », éditeurs J. Maurice et Y. Crozet, Prédit, Economica.

Cahuc, Sylberberg (1996) « *Economie du travail* », De Boeck, page 28.

Champsaur, Cotis (2010), « *Rapport sur la situation des finances publiques* », La documentation française.

Commissariat général du Plan (1983) « *Calcul économique et résorption des déséquilibres* », E. Malinvaud, R .Guesnerie, B. Walliser, D. Goudard, La documentation française.

Commissariat Général du Plan (2005), « *Révision du taux d'actualisation des investissements publics* », rapport présidé par D. Lebègue.

Cullis, Jones (1998), « *Public finance and public choice* », Oxford University Press.

Dahlby (1998), "*Progressive taxation and the social marginal cost of publics funds*", Journal of publics economics.

Diamond P. et A. Mirrlees (1971a), "*Optimal Taxation and Public Production ; I : Production Efficiency*", AER, vol 38, avril

Diamond P. et A. Mirrlees (1971b), "*Optimal Taxation and Public Production ; II : Tax Rules*", AER, vol 61, juin

Guesnerie R. (1995) "*A Contribution to the Pure Theory of Taxation*", Econometric SocietY Monographs

Jones (2005), "*Applied welfare economics*", Oxford University Press, Oxford, UK.

Kaplow (1996), "*The optimal supply of public goods and the distortionary cost of taxation*".

Kleven, Kreiner (2006), « *The marginal cost of public funds : hours of work versus labour force participation* », Center for Economic Policy Research, Discussion Paper n° 5594.

Laffont (1998), "*Competition, Information, and Development",* Annual, World Bank Conference on Development Economics, Washington DC.

Maurice et Crozet, « éditeurs » (2007) « *Le calcul économique dans le processus de choix collectif des investissements de transport* », PREDIT, Economica.

Mayshar (1991), "*On measuring the marginal cost of funds analytically*", American economic review.

Musgrave et Brewer Richman (1973) « *Public Finance in Theory and Practice* ».

Picard (2002) « *Eléments de microéconomie* », Montchrestien, page 61.

Piron (2004), *« La dimension économique du partenariat public-privé dans les transports* », revue Transports n° 424

Proost (2007) « *L'analyse des projets d'infrastructures de transport dans un cadre d'équilibre général* », dans « *Le calcul économique dans le processus de choix collectif des investissements de transport* », éditeurs J. Maurice et Y. Crozet, Prédit, Economica.

Prud'homme et Kopp (2006), « *Projets en PPP, contrainte budgétaire et choix d'investissements* », revue d'économie politique n° 3.

Quinet (2005), "*Quelques réflexions à propos du rapport Lebègue*", revue Transports, n°432 juillet-août 2005.

Quinet et Sauvant (2007) « *Une méthode d'optimisation des programmes d'investissement de transport », dans « Le calcul économique dans le processus de choix collectif des investissements de transport* », éditeurs J. Maurice et Y. Crozet, Prédit, Economica.

Riess (2008), « *The economic cost of public funds in infrastructure investment* », EIB Papers, volume13 n° 1, p. 86-87.

Robien (2005) « *relative aux méthodes d'évaluation économique des grands projets d'infrastructure de transports* », Ministère des transports.

Sandmo (1998), "*Redistribution and the marginal cost of publics funds: theory and estimates*", Journal of public economics.

Snow, Warren (1996), "*The marginal welfare cost of public funds: theory and estimates*", Journal of public economics.

Stuart (1984), "*Welfare cost per dollar of additional tax revenue in the United States*", American economic review.

Thédié (1983) « *Du choix des investissements sous contrainte financière* », Annales des Ponts et Chaussées, 1er trimestre.

Annexe 1 – Instruction cadre relative aux méthodes d'évaluation des grands projets d'infrastructures de transport *(25 mars 2004 et 27 mai 2005)*

(document disponible sur internet : http://temis.documentation.equipement.gouv.fr/documents/temis/14849/14849_2005.pdf)

Annexe 2 - Regard analytique sur les distorsions résultant d'un financement du « bien public » par des prélèvements obligatoires non forfaitaires

Définitions

La société est supposée constituée de n agents identiques.
Considérons l'un de ces agents, dit « représentatif ».

T c'est la période calendaire considérée.
Exemples : 24h ; ou une année (8 766 heures).
Les grandeurs et comportements examinés ci-après sont supposés *stationnaires*, c'est-à-dire se reproduire à l'identique d'une période de durée T à la suivante.

On examine l'agent représentatif pendant cette période T et on appelle :

x	son temps de « loisir », avec $0 \leq x \leq T$
y	sa consommation annuelle du « bien privatif composite[1] », avec $y \geq 0$
z	la quantité de « bien public » à laquelle il a accès, avec $z \geq 0$
$U(x, y, z)$	sa fonction d'utilité
h	son temps de travail, avec : $0 \leq h \leq T$

Equilibre du budget-temps de l'agent représentatif : $\boxed{h = T - x}$

Pendant cette même période T, on appelle :

w	le salaire horaire *superbrut*[2]
p	le prix du bien privatif composite
$G(z)$	le coût total de production du bien public,

que - pour simplifier - on suppose linéaire : $G(z) = q.z$

Revenus de l'agent représentatif pendant ladite période T :

$w.(T - x)$	revenu salarial *superbrut*
R_0	revenu non-salarial[1]

(1) Ou « panier » de biens privatifs.
(2) Salaire horaire super-brut : salaire horaire tel que payé par l'employeur, y compris toutes cotisations sociales (cotisations employeur et cotisations salarié).

$RB = R_0 + w.(T - x)$ revenu brut, avant tout prélèvement obligatoire

PO montant de tous les prélèvements obligatoires assis sur le revenu brut ou ses composantes

$RD = RB - PO$ revenu disponible

Equilibre du budget monétaire de l'agent représentatif[2] :

$$R_0 + w.(T - x) - p.y - PO = 0$$

que l'on peut écrire
sous la forme équivalente : $\boxed{(R_0 + w.T) - w.x - p.y - PO = 0}$ (1)

Remarque : dans (1), $(R_0 + w.T)$ peut abstraitement être considéré comme un « revenu fictif », avec lequel l'agent représentatif financerait à la fois ses prélèvements obligatoires, sa consommation de bien privatif composite et sa « consommation de loisir » (dont le prix serait w).

Equilibre du budget public[3] : $\boxed{PO = (q.z)/n}$ (2)

Les variables exogènes sont : T, R_0, w, p, q ainsi que la fonction $U(.,.,.)$
Les variables endogènes sont : x, y, z, h
Le but de la présente note est d'examiner l'influence de différentes modalités de prélèvements obligatoires.

1. « Consentement à payer l'impôt », optimum « de premier rang »

Supposons ici que le processus de décision en matière de bien public permette de mettre explicitement en regard le dimensionnement du bien public et le montant des prélèvements obligatoires permettant de le financer[4].

La contrainte (1) peut alors s'écrire : $(R_0 + w.T) - w.x - p.y - q.z/n = 0$ (3)
En maximisant sa satisfaction sous la contrainte (3), l'agent représentatif est alors conduit à considérer le Lagrangien suivant:

$$\Lambda(x, y, z, \lambda) = U(x, y, z) + \lambda.[(R_0 + w.T) - w.x - p.y - (q.z)/n] \quad (4)$$

La maximisation de ce Lagrangien conduit aux conditions du premier ordre suivantes :

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{w} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{p} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{q/n} = \lambda \quad (5)$$

---

(1) Y compris revenus du patrimoine, transferts sociaux divers, etc.
(2) On fait abstraction de l'épargne.
(3) L'agent représentatif est supposé supporter un montant égal à la fraction $1/n$ du coût total de production du bien public.
(4) Le « commissaire priseur » demanderait dans ce cas : « si le bien public était de volume z, quel prélèvement obligatoire seriez-vous prêt à payer ? ».

Ces équations, conjointement avec (3), déterminent les valeurs optimales $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ en fonction des exogènes R_0, w, p, q.

La satisfaction prend alors sa valeur maximale $U(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Autrement dit : tout vecteur (x, y, z) différent du vecteur $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ conduirait à un degré de satisfaction $U(x, y, z)$ inférieur à $U(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. $U(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ est l' « optimum de premier rang ».

L'expression obtenue en remplaçant dans $U(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ les arguments $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ par leurs expressions en fonction des paramètres R_0, w, p, q, est dénommée « utilité indirecte » $V(R_0, w, p, q)$.

Exemple d'une fonction d'utilité à élasticité de substitution constante (CES)

- *Supposons que la fonction d'utilité ait la forme d'une CES :*

$$U^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \alpha . x^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \beta . y^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \gamma . z^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \qquad \text{avec} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \qquad (6.1)$$

On supposera ci-après
que l'élasticité de substitution est inférieure[1] à 1 : $\boxed{0 < \varepsilon < 1}$ (6.2)

- *La solution du Lagrangien (4) serait alors donnée, avec les notations définies en (7), par les relations (8) –voir ci-après-*

Notations :

$$\boxed{W = \alpha . \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon}} \qquad \boxed{P = \beta . \left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \qquad \boxed{Q = \gamma . \left(\frac{q/n}{\gamma}\right)^{1-\varepsilon}} \qquad (7)$$

Remarque : $W, P\,et\,Q$ ne dépendent que des exogènes, respectivement $w, p\,et\,q$

Solution[2] :

$$\boxed{\hat{x} = \frac{R_0 + w.T}{W + P + Q} . \frac{W}{w}} \qquad (8.1)$$

$$\boxed{\hat{y} = \frac{R_0 + w.T}{W + P + Q} . \frac{P}{p}} \qquad (8.2)$$

$$\boxed{\hat{z} = \frac{R_0 + w.T}{W + P + Q} . \frac{Q}{q/n}} \qquad (8.3)$$

Remarque : $P/(W + P + Q)$ est le « coefficient budgétaire fictif» relatif au bien privatif composite, c'est-à-dire la part du revenu fictif précité de l'agent représentatif qu'il consacre à l'achat de ce bien.

---

(1) Pour simplifier, l'exposant ε est supposé le même pour les trois arguments $x, y\,et\,z$. On pourrait les distinguer, notamment en adoptant des « CES emboîtées » ; mais les calculs seraient formellement plus lourds.
(2) Voir preuve ci-après.

Par assimilation, $W/(W+P+Q)$ est le coefficient budgétaire fictif relatif au loisir et $Q/(W+P+Q)$ le coefficient budgétaire fictif relatif au bien public.

Preuve :

De (6.1) on tire : $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \alpha.\left(\dfrac{x}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}$ $\quad \dfrac{\partial U}{\partial y} = \beta.\left(\dfrac{y}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}$ $\quad \dfrac{\partial U}{\partial z} = \gamma.\left(\dfrac{z}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}$

Les équations (5) s'écrivent alors :

$$\frac{\alpha.(x/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{w} = \frac{\beta.(y/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{p} = \frac{\gamma.(z/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{q/n} = \lambda$$

On en tire : $x = U.\lambda^{-\varepsilon}.\left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}$ $\quad y = U.\lambda^{-\varepsilon}.\left(\dfrac{p}{\beta}\right)^{-\varepsilon}$ $\quad z = U.\lambda^{-\varepsilon}.\left(\dfrac{q/n}{\gamma}\right)^{-\varepsilon}$ (9)

Par suite :

$$w.x = U.\lambda^{-\varepsilon}.\,\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} \quad p.y = U.\lambda^{-\varepsilon}.\,\beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon} \quad (q/n).z = U.\lambda^{-\varepsilon}.\,\gamma.\left(\frac{q/n}{\gamma}\right)^{1-\varepsilon} \tag{10}$$

En reportant (10) dans la contrainte (3) on obtient :

$$U.\lambda^{-\varepsilon} = \frac{R_0 + w.T}{\alpha.\left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\dfrac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon} + \gamma.\left(\dfrac{q/n}{\gamma}\right)^{1-\varepsilon}} \tag{11}$$

En reportant (11) dans (9) on obtient les valeurs optimales ci-après :

$$\hat{x} = \frac{(R_0 + w.T).\left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\dfrac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon} + \gamma.\left(\dfrac{q/n}{\gamma}\right)^{1-\varepsilon}} \tag{12.1}$$

$$\hat{y} = \frac{(R_0 + w.T).\left(\dfrac{p}{\beta}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\dfrac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon} + \gamma.\left(\dfrac{q/n}{\gamma}\right)^{1-\varepsilon}} \tag{12.2}$$

$$\hat{z} = \frac{(R_0 + w.T).\left(\dfrac{q/n}{\gamma}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\dfrac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon} + \gamma.\left(\dfrac{q/n}{\gamma}\right)^{1-\varepsilon}} \tag{12.3}$$

Les relations (12) s'écrivent, avec les notations (7), sous la forme (8) cqfd

- *Proportions optimales du loisir et du bien public par rapport à la consommation de bien privatif composite :*

De (9) ainsi que de (12) on déduit : $\boxed{\frac{\hat{x}}{\hat{y}} = \left(\frac{w/\alpha}{p/\beta}\right)^{-\varepsilon}}$ et $\boxed{\frac{\hat{z}}{\hat{y}} = \left(\frac{(q/n)/\gamma}{p/\beta}\right)^{-\varepsilon}}$ (13)

- *Sens de variation des solutions optimales $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ données par (8).*

Synthèse des résultats (voir tableau 1) : Avec l'hypothèse $0 < \varepsilon < 1$ et en considérant comme donné le revenu non-salarial $R_0 \geq 0$, on établit (voir justification ci-après) les résultats résumés dans le tableau 1 ci-dessus.

Tableau 1 - Sens de variation des solutions optimales

Hypothèses : $0 < \varepsilon < 1$ $R_0 \geq 0$ donné	Si le salaire horaire w augmente … …de w_0 à w^* …	 …au-delà de w^* …	Si le prix p du bien privatif composite augmente …	Si le coût unitaire q du bien public augmente …
alors le loisir $\hat{x}$: et le temps de travail $(T - \hat{x})$:	diminue augmente	augmente diminue	diminue augmente	diminue augmente
alors la consommation $\hat{y}$ de bien privatif composite :	augmente	augmente	diminue	diminue
alors la consommation $\hat{z}$ de bien public :	augmente	augmente	diminue	diminue

Source : Auteurs

Voir ci-après les définitions de w_0 et w^*

Justifications.

➢ *Variation du « loisir optimal » $\hat{x}$*

▪ *Retour sur l'intervalle de définition*[1] $\boxed{0 \leq \hat{x} \leq T}$ *: participation au marché du travail*

Résultats :

o La condition $0 \leq \hat{x}$ est respectée.

o La condition $\hat{x} \leq T$ requiert : $\boxed{w \geq w_0}$ avec : $\boxed{w_0 = \alpha.\left(\frac{R_0}{T.(P+Q)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}$ (14.1)

o w_0 est le « salaire horaire minimum de participation au marché du travail[2] ». C'est une fonction croissante du revenu non salarial R_0 (avec $w_0 = 0$ si $R_0 = 0$), et décroissante du prix p et du coût q.

(1) Voir page 1 ci-dessus.
(2) Voir P. Cahuc et Zylberger.A (1996) « Economie du travail », De Boeck Université, pages 24 et 25.

Preuve :

- Considérons (8.1). Il est clair que $0 \leq x$. Quant à la condition $x \leq T$, elle s'écrit : $\dfrac{R_0 + w.T}{W+P+Q}.\dfrac{W}{w} \leq T$, soit $(R_0 + w.T).W \leq w.T.(W+P+Q)$, qui donne $\dfrac{R_0}{T.(P+Q)} \leq \dfrac{w}{W}$, c'est-à-dire $\dfrac{R_0}{T.(P+Q)} \leq \left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{\varepsilon}$, d où (14.1).

Conséquence :

- Si $w \leq w_0$, le loisir occupe la totalité du temps calendaire, le temps de travail est nul ; l'agent représentatif « ne participe pas au marché du travail ». L'optimum libre ne peut être atteint. On est dans le cas d'un « optimum en coin ». On n'ira pas plus loin dans l'exploration de ce cas.

▪ *Variation du « loisir optimal » $\hat{x}$ en fonction du salaire horaire $w > w_0$*

Résultats :

- Il existe une « valeur critique » w^* du salaire horaire (supérieure au salaire horaire minimum de participation au marché du travail w_0) pour laquelle le « loisir optimal $\hat{x}$ » passe par un minimum, donc le « temps optimal de travail $\hat{h}$ » par un maximum. Si le salaire horaire w croît de w_0 à w^*, le loisir optimal $\hat{x}$ diminue (à partir de T) et le temps optimal de travail $\hat{h}$ augmente (à partir de 0). Puis si le salaire horaire w augmente au-delà de w^*, le loisir optimal $\hat{x}$ augmente et le temps optimal de travail $\hat{h}$ diminue (en deçà de son maximum).
- La valeur critique de w^* est solution de l'équation :

$$\boxed{w^*.T.(P+Q).(1-\varepsilon) = R_0.(W^* + \varepsilon.(P+Q))} \text{ où } \quad W^* = \alpha.\left(\frac{w^*}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} \qquad (14.2)$$

(14.2) qui implique : $w^* = 0$ si $R_0 = 0$

Voir figure A.1.

Preuve :

- Dans (12.1), w intervient directement au *dénominateur* mais aussi dans les deux facteurs du *numérateur*. Prenons la différentielle logarithmique :

$$\frac{d\hat{x}}{\hat{x}} / \frac{dw}{w} = \frac{w.T}{R_0 + w.T} - \varepsilon - (1-\varepsilon)\frac{W}{W+P+Q}$$

Elle est du signe de :

$\Delta_x(w) = w.T.(W+P+Q) - \varepsilon.(R_0 + w.T).(W+P+Q) - (1-\varepsilon).W.(R_0 + w.T)$, soit :

$\Delta_x(w) = w.T.(P+Q).(1-\varepsilon) - R_0.(W + \varepsilon.(P+Q))$

- Pour la valeur minimale $w = w_0$, la dérivée est *négative*. En effet, d'après (14.1) on a : $w_0 .T.(P+Q) = R_0 .W_0$ et par suite : $\Delta_x(w_{0n}) = -\varepsilon . R_0 .(W_0 + P + Q)$, *négatif*.

Il en résulte que lorsque w augmente à partir de w_0, le loisir $\hat{x}$ décroît, la durée du travail $\hat{h}$ (initialement nulle) croît.

- Ce mouvement s'interrompt pour la valeur de w^* qui annule la dérivée, c'est-à-dire qui est solution de $\Delta_x(w^*) = 0$ soit :
  $w^*.T.\,(P+Q).(1-\varepsilon) = R_0 .(W^* + \varepsilon .(P+Q))$.   (14.3)

- On pourrait montrer que cette solution w^* existe et est unique.

Si le salaire horaire w augmente au-delà de w^*, la dérivée devient positive : le loisir $\hat{x}$ augmente aussi, et le temps de travail $\hat{h}$ diminue.
(La limite mathématique de $\hat{x}$, lorsque la variable w tend vers l'infini, est T).

- *Variation du « loisir optimal » $\hat{x}$ en fonction du prix p du bien privatif composite.*

Résultat :

- $\hat{x}$ est une fonction décroissante de p : si ce prix augmente, le loisir optimal diminue, le temps optimal de travail augmente.

Preuve :

- considérons (12.1). p intervient sous la forme $p^{1-\varepsilon}$ qui, dès lors que $0 < \varepsilon < 1$, est croissante, et qui est placée en *dénominateur.*   Cqfd

- *Variation du « loisir optimal » $\hat{x}$ en fonction du coût unitaire q du bien public*

Résultat :

- $\hat{x}$ est une fonction décroissante de q : si ce coût augmente, le loisir optimal diminue, le temps optimal de travail augmente.

Preuve :

- analogue à la preuve précédente.

➢ *Sens de variation de la consommation optimale $\hat{y}$ de bien privatif composite.*

- *Variation de la consommation optimale $\hat{y}$ en fonction du salaire horaire w*

Résultat :

- Lorsque le salaire horaire w croît à partir de sa valeur minimale w_0, la consommation optimale de bien privatif composite croît.

Preuve :

- Considérons (12.2). Le sens de variation de $\hat{y}$ du bien privatif composite en fonction du salaire horaire w n'est pas évident, car w intervient au *dénominateur* mais aussi au *numérateur*.
- Prenons la différentielle logarithmique : $\frac{d\hat{y}}{\hat{y}} / \frac{dw}{w} = \frac{w.T}{R_0 + w.T} - (1-\varepsilon)\frac{W}{W+P+Q}$

Elle est du signe de : $\Delta_y(w) = w.T.\,(W+P+Q) - (1-\varepsilon).\,X.(R_0 + w.T)$, soit :

$\Delta_y(w) = w.T.(\varepsilon.W + P + Q) - R_0.(1-\varepsilon).W$

Cette dérivée s'annule pour une valeur w^{**}, qui est une fonction croissante de R_0 ($w^* = 0$ si $R_0 = 0$). La dérivée est négative pour $0 < w < w^{**}$, positive pour $w^{**} < w$.

- Or pour w_0 la dérivée est positive.

En effet compte tenu de (14.1) : $R_0 = \frac{w_0}{W_0}.T.(P+Q)$,

donc $\Delta_y(w_0) = w_0.T.(\varepsilon.W_0 + P + Q) - w_0.T.(P+Q).(1-\varepsilon).$, soit :

$\Delta_y(w_0) = \varepsilon.w_0.T.(W_0 + P + Q)$, qui est positif. Il en résulte que $w^* < w_0$.

A fortiori, pour $w_0 < w$, on aura $0 < \Delta_y(w_0) < \Delta_y(w)$

cqfd

- Donc, lorsque w augmente à partir de w_0, la consommation de bien privatif composite croît.

■ *Variation de la consommation optimale $\hat{y}$ en fonction du prix p de ce bien*

Résultat :

- Si le prix p croît, la consommation optimale $\hat{y}$ *diminue.*

Preuve :

- p intervient au *numérateur* de (12.2) sous la forme $p^{-\varepsilon}$, qui est décroissante, et sous la forme $p^{1-\varepsilon}$, qui, dès lors que $0 < \varepsilon < 1$, est croissante et figure au *dénominateur.* cqfd

■ *Variation de la consommation optimale $\hat{y}$ en fonction du coût q* du bien public

Résultat :

- Si le coût q du bien public croît, la consommation optimale $\hat{y}$ diminue.

Preuve :

o q intervient dans (12.2) sous la forme $(q/n)^{1-\varepsilon}$, qui, dès lors que $0<\varepsilon<1$, est croissante, et qui figure au *dénominateur*.
cqfd

➢ *Sens de variation de la consommation optimale* $\hat{z}$ *de bien public, donnée par (12.3)*

La relation (12.3) est symétrique de la relation (12.2) : il suffit d'intervertir les rôles du prix p du bien composite et du coût (q/n) du bien public.

- **« Optimum de premier rang », « utilité indirecte ».**

Le niveau maximal de satisfaction de l'agent représentatif, ou « optimum de premier rang », s'obtient en reportant les solutions optimales $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ dans la fonction d'utilité (6.1). L' « utilité indirecte » s'obtient en exprimant $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ en fonction des paramètres R_0, w, p, q.

On obtient : $V^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \alpha.\hat{x}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \beta.\hat{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \gamma.\hat{z}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$ avec $\alpha+\beta+\gamma=1$

Tous calculs faits : $$V = \frac{(R_0 + w.T)}{\left[\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon} + \gamma.\left(\frac{q/n}{\gamma}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} \quad (16.1)$$

Ce qui, avec les notations simplifiées (7), s'écrit : $$\boxed{V = \frac{(R_0 + w.T)}{[W+P+Q]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}} \quad (16.2)$$

➢ *Variations de* V

Résultat :

V est une fonction croissante de R_0 et décroissante de p et q.

Avec l'hypothèse $0<\varepsilon<1$, V est une fonction croissante de w si et seulement si :

$\boxed{w \geq w_0}$ avec $\boxed{w_0 = \alpha.\left(\frac{R_0}{T.(P+Q)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}$ qui n'est autre que (14.1)

Preuve :

Sur (16.1), il est clair que V est une fonction croissante de R_0 et décroissante de p et q

Prenons la dérivée logarithmique de V par rapport à w. Il vient :

$$\frac{\partial V / \partial w}{W} = \frac{T}{R_0 + w.T} - \frac{(w/\alpha)^{-\varepsilon}}{W + P + Q}$$, qui est du signe de :

$\Delta_V = T.(W + P + Q) - (R_0 + w.T)(w/\alpha)^{-\varepsilon}$ soit : $\Delta_V = T.(P + Q) - (R_0)(w/\alpha)^{-\varepsilon}$

Donc $\Delta_V \geq 0$ si et seulement si $w \geq w_0$ avec $w_0 = \alpha.\left(\frac{R_0}{T.(P+Q)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ cqfd

2. Cas de prélèvements obligatoires non explicitement liés au dimensionnement du bien public

Supposons maintenant que les prélèvements obligatoires prennent des formes diverses, telles que par exemple un prélèvement forfaitaire F, un impôt au taux ρ sur le revenu, une taxe τ sur le salaire (à l'instar des cotisations sociales), ou une taxe au taux θ sur le bien privatif composite (à l'instar de la TVA). L'agent représentatif connaît ces barèmes de prélèvements obligatoire, mais il ne sait pas faire le lien explicite du montant de ses impôts avec le bien public, dont -en outre- il ne connaît pas *a priori* le prix unitaire q, et dont il considère le volume z comme exogène. Examinons successivement l'impact propre à chaque type de prélèvement obligatoire.

2.1. Cas d'un prélèvement forfaitaire F

La contrainte budgétaire de l'agent représentatif s'écrit maintenant :

$$(R_0 + w.T - F) - w.x - p.y = 0 \qquad (17)$$

L'agent représentatif est amené à considérer le Lagrangien suivant :

$$\Lambda(x, y, \lambda_F) = U(x, y|z) + \lambda_F .[(R_0 + w.T - F) - w.x - p.y] \qquad (18)$$

La maximisation de ce Lagrangien conduit aux conditions du premier ordre suivantes :

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{w} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{p} = \lambda_F \qquad (19)$$

qui, conjointement avec (17), déterminent les valeurs optimales x_F, y_F en fonction des exogènes $R_0 - F, w, p$ et de l'exogène z.

Connaissant x_F, y_F, il est possible de calculer le degré de satisfaction atteint par l'agent représentatif, en fonction de F et de z.

Les pouvoirs publics peuvent dès lors fixer simultanément la dimension du bien public et le forfait permettant de le financer.

Résultat :

Si les pouvoirs publics choisissent la dimension optimal $\hat{z}$ donnée par (8.3) et le forfait $\hat{F}=(q/n).\hat{z}$, alors l'agent représentatif choisira spontanément $x_F=\hat{x}$ et $y_F=\hat{y}$ et par suite la société atteindra, de façon décentralisée, son optimum de premier rang.

Preuve dans le cas de la CES

Les équations (19) deviennent :

$$\frac{\alpha.(x/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{w}=\frac{\beta.(y/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{p}=\lambda_F$$

d'où l'on tire : $x=U.\lambda_F^{-\varepsilon}.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}$ et $y=U.\lambda_F^{-\varepsilon}.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{-\varepsilon}$ (20)

Par suite : $w.x=U.\lambda_F^{-\varepsilon}.\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon}$ $p.y=U.\lambda_F^{-\varepsilon}.\beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}$ (21)

En reportant (21) dans la contrainte (17) on obtient :

$$U.\lambda_F^{-\varepsilon}=\frac{R_0+w.T-F}{\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon}+\beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \qquad (22)$$

En reportant (22) dans (20), on obtient :

$$x_F=\frac{(R_0+w.T-F).\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon}+\beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad y_F=\frac{(R_0+w.T-F).\left(\frac{p}{\beta}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon}+\beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}}$$

(23)

Avec les notations (7), les relations (23) s'écrivent plus simplement :

$$\boxed{x_F=\frac{R_0+w.T-F}{W+P}.\frac{W}{w}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_F=\frac{R_0+w.T-F}{W+P}.\frac{P}{p}} \qquad (24)$$

- *Proportions du loisir et du bien public par rapport à la consommation de bien privatif composite :*

Il découle de (20) ainsi que de (24) que $\frac{x_F}{y_F}=\left(\frac{w/\alpha}{p/\beta}\right)^{-\varepsilon}$, tout comme l'on avait $\frac{\hat{x}}{\hat{y}}=\left(\frac{w/\alpha}{p/\beta}\right)^{-\varepsilon}$. Le « forfait », ne changeant pas les prix relatifs, ne change pas la *proportion* entre loisir et consommation de bien privatif composite.

- *Niveau optimal du forfait*

Reste à régler le *niveau* du forfait. Faisons le rapport membre à membre de (24) à (8) :

$$\frac{x_F}{\hat{x}} = \frac{W+P+Q}{W+P}.\frac{R_0 + w.T - F}{R_0 + w.T} \quad \text{soit } \frac{x_F}{\hat{x}} = \frac{W+P+Q}{W+P}.\left[1 - \frac{F}{R_0 + w.T}\right] \qquad (25)$$

Supposons que les pouvoirs publics fixent le forfait à la valeur $\hat{F} = (q/n).\hat{z}$, c'est-à-dire d'après (8.3) : $\boxed{\hat{F} = \frac{Q}{W+P+Q}.(R_0 + w.T)}$ (26)

Reportons alors (26) dans (25) :

$$\frac{x_F}{\hat{x}} = \frac{W+P+Q}{W+P}.\left[1 - \frac{Q}{W+P+Q}\right] \quad \text{soit finalement : } \boxed{\frac{x_{\hat{F}}}{\hat{x}} = 1} \qquad \text{cqfd}$$

On montrerait de même que : $\boxed{\frac{y_{\hat{F}}}{\hat{y}} = 1}$

Conséquence

- o L'instauration du forfait donné par (26) permet de décentraliser l'optimum, sans perte de bien-être.
- o *A contrario*, toute autre valeur du forfait conduirait à une satisfaction inférieure.

2.2. Cas d'un impôt de taux ρ sur le revenu

Supposons maintenant que le prélèvement obligatoire prenne (exclusivement) la forme d'un d'un impôt de taux ρ sur le revenu.
L'approche n'a de sens que si $\boxed{0 \leq \rho < 1}$.

Le revenu disponible de l'agent représentatif serait égal à $[R_0 + w.(T - x)].(1-\rho)$

La contrainte budgétaire de l'agent représentatif s'écrit maintenant :

$$[R_0 + w.(T-x)].(1-\rho) - p.y = 0 \ \text{ soit } (R_0 + w.T).(1-\rho) - w.x.(1-\rho) - p.y = 0 \quad (27)$$

Pour simplifier les notations, posons : $\boxed{w_\rho = w.(1-\rho)}$ et de même $\boxed{W_\rho = W.(1-\rho)^{1-\varepsilon}}$
w_ρ est le *salaire horaire net*, après impôt.

L'agent représentatif est amené à considérer le Lagrangien suivant :

$$\Lambda(x, y, \lambda_\rho) = U(x, y|z) + \lambda_\rho . [(R_0 + w.T).(1-\rho) - w_\rho.x - p.y] \qquad (28)$$

La maximisation de ce Lagrangien conduit aux conditions du premier ordre suivantes :

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{w_\rho} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{p} = \lambda_\rho \tag{29}$$

Les équations (29), conjointement avec (27), déterminent les valeurs optimales x_ρ, y_ρ en fonction des exogènes R_0, w, p, ρ et de l'exogène z .

Connaissant x_ρ, y_ρ, il est possible de calculer les ressources fiscales, qui sont égales à :

$$\boxed{\rho.\left[R_0 + w.\left(T - x_\rho\right)\right]} \tag{30}$$

de sorte que

le volume z du bien public est égal à :

$$\boxed{z_\rho = \frac{\rho.\left[R_0 + w.\left(T - x_\rho\right)\right]}{q/n}} \tag{31}$$

La satisfaction atteinte par l'agent représentatif est donc $U\left(x_\rho, y_\rho, z_\rho\right)$.

Les pouvoirs publics sont alors censés fixer la valeur de ρ de façon à maximiser $U\left(x_\rho, y_\rho, z_\rho\right)$. Cette valeur optimale de ρ est solution de :

$$\frac{\partial U}{\partial x_\rho}.\frac{\partial x_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial y_\rho}.\frac{\partial y_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial z_\rho}.\frac{\partial z_\rho}{\partial \rho} = 0 \tag{32.1}$$

Ce qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$x_\rho.\frac{\partial U}{\partial x_\rho}.\frac{\frac{\partial x_\rho}{\partial \rho}}{x_\rho} + y_\rho.\frac{\partial U}{\partial y_\rho}.\frac{\frac{\partial y_\rho}{\partial \rho}}{y_\rho} + z_\rho.\frac{\partial U}{\partial z_\rho}.\frac{\frac{\partial z_\rho}{\partial \rho}}{z_\rho} = 0 \tag{32.2}$$

__Justifications dans le cas de la CES__

- *Les équations (29) deviennent :*

$$\frac{\alpha.(x/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{w_\rho} = \frac{\beta.(y/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{p} = \lambda_\rho \tag{33}$$

On en tire : $x = U.\lambda_\rho^{-\varepsilon}.\left(\frac{w_\rho}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}$ et $y = U.\lambda_\rho^{-\varepsilon}.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{-\varepsilon}$ (34)

Par suite : $w_\rho.x = U.\lambda_\rho^{-\varepsilon}.\alpha.\left(\frac{w_\rho}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon}$ $p.y = U.\lambda_\rho^{-\varepsilon}.\beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}$ (35)

En reportant (35) dans la contrainte (27) on obtient :

$$U.\lambda_{\rho}^{-\varepsilon} = \frac{(R_0 + w.T).(1-\rho)}{\alpha.\left(\frac{w_\rho}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \qquad (36)$$

En reportant (36) dans (34), on obtient :

$$x_\rho = \frac{(R_0 + w.T).(1-\rho).\left(\frac{w_\rho}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\frac{w_\rho}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad y_\rho = \frac{(R_0 + w.T).(1-\rho).\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\frac{w_\rho}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \qquad (37)$$

Compte tenu des définitions (7), on observe que : $\alpha.\left(\frac{w_\rho}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} = W.(1-\rho)^{1-\varepsilon}$

Les relations (37.1) s'écrivent alors :

$$x_\rho = \frac{R_0 + w.T}{W.(1-\rho)^{1-\varepsilon} + P}.\frac{W}{w}.(1-\rho)^{1-\varepsilon} \quad \text{et} \quad y_\rho = \frac{R_0 + w.T}{W.(1-\rho)^{1-\varepsilon} + P}.\frac{P}{p}.(1-\rho) \qquad (38)$$

➢ *Condition* $x_\rho \leq T$ *de participation au marché du travail*

Résultats :

- o Considérons le *salaire horaire superbrut* w comme *exogène.*
- o On peut mettre en évidence un *revenu non salarial critique*, à savoir :

$$\boxed{R_0^* = \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\varepsilon}.T.P} \qquad (39)$$

- o Si le revenu non-salarial est inférieur ou égal à cette valeur critique, alors la condition $x_\rho \leq T$ de participation de l'agent représentatif au marché du travail est vérifiée pour toute valeur du taux d'impôt sur le revenu appartenant à l'intervalle $\boxed{0 \leq \rho < 1}$.
- o En revanche, si le revenu salarial est supérieur à cette valeur critique, alors la condition $x_\rho \leq T$ de participation de l'agent représentatif au marché du travail n'est vérifiée que pour les valeurs du taux d'impôt sur le revenu appartenant à l'intervalle $\boxed{\rho_0 \leq \rho < 1}$, avec $\boxed{\rho_0 = 1 - \left(\frac{R_0^*}{R_0}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}$ (40)

Interprétation : pour que l'incitation au travail agisse, il faut que l'impôt sur le revenu réduise suffisamment le montant du revenu non-salarial net.

Preuve :

- A partir de (38), la condition $x_\rho \leq T$ s'écrit : $\dfrac{R_0 + w.T}{W.(1-\rho)^{1-\varepsilon} + P}.\dfrac{W}{w}.(1-\rho)^{1-\varepsilon} \leq T$, soit :

$(R_0 + w.T).W.(1-\rho)^{1-\varepsilon} \leq w.T.\left[W.(1-\rho)^{1-\varepsilon} + P\right]$, qui donne : $(1-\rho)^{1-\varepsilon} \leq \dfrac{w}{W}.\dfrac{T.P}{R_0}$,

c'est-à-dire $(1-\rho)^{1-\varepsilon} \leq \left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{\varepsilon}.\dfrac{T.P}{R_0}$ et finalement (avec $0 \leq \varepsilon < 1$) :

$$1-\rho \leq \left(\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\varepsilon}.\frac{T.P}{R_0}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Posons $R_0^* = \left(\dfrac{w}{\alpha}\right)^{\varepsilon}.T.P$, appelé *revenu non-salarial critique*.

- La condition de participation au marché du travail s'écrit donc :

$$\rho \geq \rho_0 \text{ avec } \rho_0 = 1 - \left(\frac{R_0^*}{R_0}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \qquad (41.1)$$

Or ρ_0 est négatif ou nul si et seulement si $R_0 \leq R_0^*$. (41.2)

Donc si $R_0 \leq R_0^*$, toute valeur du taux d'impôt sur le revenu appartenant à l'intervalle $0 \leq \rho < 1$ vérifie la condition (40) de participation au marché du travail.

En revanche, si $R_0 > R_0^*$, alors ρ_0 est positif (et inférieur à 1) et la condition de participation au marché du travail suppose que le taux d'impôt sur le revenu appartienne à l'intervalle $\rho_0 \leq \rho < 1$. Cqfd

➢ *Proportions du loisir et du bien public par rapport à la consommation de bien privatif composite*

Il découle de (34) ainsi que de (38) que $\dfrac{x_\rho}{y_\rho} = \left(\dfrac{w/a}{p/\beta}\right)^{-\varepsilon}.(1-\rho)^{-\varepsilon}$, qui, compte tenu de (13), peut s'écrire $\boxed{\dfrac{x_\rho}{y_\rho} = \left(\dfrac{\hat{x}}{\hat{y}}\right).(1-\rho)^{-\varepsilon}}$. Ainsi, l'impôt au taux $\rho > 0$ sur le revenu, par son influence sur le salaire horaire net, change les *prix relatifs* et, partant, change la *proportion* entre loisir et consommation de bien privatif composite.

On montrerait aussi à partir de (31) que le rapport $\dfrac{z_\rho}{y_\rho}$ est lui-aussi différent du rapport $\dfrac{\hat{z}}{\hat{y}}$.

Conséquence : il n'existe aucun taux de la taxe ρ sur le bien privatif composite qui permettrait d'obtenir à la fois $x_\rho = \hat{x}$, $y_\rho = \hat{y}$ et $z_\rho = \hat{z}$. Il en résulte que, quel que soit $\rho > 0$, le vecteur (x_ρ, y_ρ, z_ρ) est *différent* du vecteur $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, et que par conséquent le niveau de satisfaction obtenu « avec impôt au taux $\rho > 0$ sur le revenu » est *inférieur* au niveau de satisfaction « de premier rang » donné par (16).

➢ *Recherche par les pouvoirs publics de la valeur ρ pour laquelle la satisfaction de l'agent représentatif serait maximale.*

Soit à résoudre l'équation (32.2).

Avec la CES : $$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha.\left(\frac{x}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \beta.\left(\frac{y}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma.\left(\frac{z}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} \tag{42}$$

Reportons dans (32.2), divisons les deux membres par $\frac{\partial U}{\partial y}$, puis utilisons le dérivées logarithmiques et divisons par y_ρ. La condition (32.2) s'écrit :

$$\alpha.\left(\frac{x_\rho}{y_\rho}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}.\frac{\frac{\partial x_\rho}{\partial \rho}}{x\rho} + \beta.\frac{\frac{\partial y_\rho}{\partial \rho}}{y_\rho} + \gamma.\left(\frac{z_\rho}{y_\rho}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}.\frac{\frac{\partial z_\rho}{\partial \rho}}{z_\rho} = 0 \tag{43}$$

On se limitera à quelques indications. Les parenthèses sont toutes positives. Calculons les dérivées logarithmiques.

- *Dérivée logarithmique de x_ρ par rapport à ρ*

Résultat : Cette dérivée est *négative*.

Preuve : à partir de (38), on montre aisément que la dérivée logarithmique de x_ρ par rapport à ρ est du signe de $-(1-\varepsilon).P$, expression qui, avec l'hypothèse $0 < \varepsilon < 1$, est *négative*.

Conséquence : si le taux ρ croît, le loisir décroît et le temps de travail croît.

Remarque : si[1] ρ croissait de 0 à 1, il résulte de (38) que x_ρ diminuerait de $\frac{R_0 + w.T}{W+P}.\frac{W}{w}$ à 0.

Voir figure A.2.

(1) Hypothèse purement mathématique, sans signification socio-économique.

- *Dérivée logarithmique de y_ρ par rapport à ρ .*

Résultat : Cette dérivée est *négative*.

Preuve : à partir de (38), on montre aisément que la dérivée logarithmique de y_ρ par rapport à ρ est du signe de $-\left(\varepsilon.W.(1-\rho)^{1-\varepsilon}+P\right)$, expression qui est *négative*.

Conséquence : si le taux ρ croît, la consommation de bien privatif composite décroît.

Remarque : si[1] ρ croissait de 0 à 1, il résulte de (38) que y_ρ diminuerait de $\dfrac{R_0+w.T}{W+P}.\dfrac{P}{p}$ à 0.

- Dérivée logarithmique de z_ρ .

Résultat : Cette dérivée est *positive*.

Preuve : à partir de (31), il apparaît que z_ρ est le produite de ρ par une fonction décroissante de x_ρ, sachant que (voir ci-dessus) le loisir x_ρ est lui-même une fonction décroissante de ρ. Il est donc clair que z_ρ est une fonction *croissante* de ρ . cqfd

Conséquence : on vérifie[2] donc que, si le taux ρ croît, la consommation de bien public croît.

Remarque : si[3] ρ croissait de 0 à 1, il résulte de (38) que z_ρ croîtrait de 0 à $\dfrac{R_0+w.T}{q/n}$

➢ *Optimum de second rang avec impôt sur le revenu*

Compte tenu de la forme (6.1) de la fonction d'utilité, avec $0<\varepsilon<1$, la nullité d'un argument implique la nullité de la satisfaction. Compte tenu des remarques ci-dessus, la satisfaction est donc nulle pour $\rho=0$ d'une part et pour $\rho=1$ d'autre part. Elle admet donc[4] (au moins) un maximum pour une valeur $\hat{\rho}$ positive ; on admettra que cette valeur est unique. Cette valeur $\hat{\rho}$ fournit « l'optimum de second rang », relatif à la fiscalité de type impôt sur le revenu.

(1) Hypothèse purement mathématique, sans signification socio-économique.
(2) C'est intuitif : les prélèvements obligatoires servent à payer le bien public et 'sauf si l'élasticité de l'impôt était supérieure a1'augmentation du Taux.
(3) Hypothèse purement mathématique, sans signification socio-économique.
(4) Théorème de Rolle.

➢ *Variation compensatrice de revenu correspondante*

Ce second rang impliquant une satisfaction inférieure au « premier rang », on peut lui faire correspondre une « variation compensatrice de revenu[1] », qui est le supplément de revenu qu'il faudrait ajouter à la situation « avec impôt au taux $\hat{\rho}$ sur le revenu» pour conserver le niveau de satisfaction « de premier rang » : cette variation de revenu peut ainsi être assimilée à la perte monétarisée de satisfaction[2] provoquée par l'impôt sur le revenu au taux $\hat{\rho}$. En cas d'impôt sur le revenu fixé à un taux différent de $\hat{\rho}$, la « variation compensatrice de revenu » serait plus forte (la détérioration supplémentaire serait, en première approximation, proportionnelle à $(\rho-\hat{\rho})^2$).

2.3. Cas d'un prélèvement au taux τ sur le salaire horaire

Supposons maintenant que le prélèvement obligatoire prenne (exclusivement) la forme d'un prélèvement de taux τ appliqué au salaire horaire *superbrut*, à l'instar de cotisations (employeur ou salarié[3]). w représentant toujours le salaire horaire *salaire super-brut*. le salaire horaire net reçu par l'agent représentatif est maintenant $\boxed{w_\tau = w.(1-\tau)}$ (44)

L'approche n'a de sens que si $\boxed{0 \le \tau < 1}$

La contrainte budgétaire de l'agent représentatif s'écrit ici :

$$(R_0 + w_\tau.T) - w_\tau.x - p.y = 0 \tag{45}$$

L'agent représentatif est amené à considérer le Lagrangien suivant :

$$\Lambda(x, y, \lambda_\tau) = U(x, y|z) + \lambda_\tau.[(R_0 + w_\tau.T) - w_\tau.x - p.y] \tag{46}$$

La maximisation de ce Lagrangien conduit aux conditions du premier ordre suivantes :

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{w_\tau} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{p} = \lambda_\tau \tag{47}$$

Ces équations (47), conjointement avec (45), déterminent les valeurs optimales x_τ, y_τ en fonction des exogènes R_0, w, p, τ et de l'exogène z.

Connaissant x_τ, y_τ, il est possible de calculer les ressources fiscales, qui sont égales à :

---

(1) Voir par exemple P. Picard (2002) « Eléments de microéconomie » page 96.
(2) Par rapport à l'optimum de premier rang, ou à la taxation forfaitaire qui permettrait d'atteindre cet optimum de premier rang.
(3) Comme on sait, le mode de calcul en France est formellement un peu différent puisque le salaire *superbrut* est égal au salaire *brut* plus les cotisations sociales employeur et le salaire *net* au salaire *brut* moins les cotisations sociales salarié. Cela n'altère pas l'analyse développée dans le présent §.

$$\boxed{(w - w_\tau).(T - x_\tau) = \tau.w.(T - x_\tau)} \tag{48}$$

De sorte que le volume du bien public est égal à : $\boxed{z_\tau = \tau.\frac{w}{q/n}.(T - x_\tau)}$ (49)

La satisfaction atteinte par l'agent représentatif est : $U(x_\tau, y_\tau, z_\tau)$.

Les pouvoirs publics sont alors censés fixer la valeur de τ de façon à maximiser $U(x_\tau, y_\tau, z_\tau)$. Cette valeur optimale de τ est solution de :

$$\frac{\partial U}{\partial x_\tau}.\frac{\partial x_\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial y_\tau}.\frac{\partial y_\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial z_\tau}.\frac{\partial z_\tau}{\partial \tau} = 0 \tag{50.1}$$

(50.1 peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$x_\tau.\frac{\partial U}{\partial x_\tau}.\frac{\frac{\partial x_\tau}{\partial \tau}}{x_\tau} + y_\tau.\frac{\partial U}{\partial y_\tau}.\frac{\frac{\partial y_\tau}{\partial \tau}}{y_\tau} + z_\tau.\frac{\partial U}{\partial z_\tau}.\frac{\frac{\partial z_\tau}{\partial \tau}}{z_\tau} = 0 \tag{50.2}$$

Justifications dans le cas de la CES

- Les équations (47) deviennent :

$$\frac{\alpha.(x/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{w_\tau} = \frac{\beta.(y/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{p} = \lambda_\tau \tag{51}$$

On en tire : $x = U.\lambda_\tau^{-\varepsilon}.\left(\frac{w_\tau}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}$ et $y = U.\lambda_\tau^{-\varepsilon}.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{-\varepsilon}$ (52)

Par suite : $w_\tau.x = U.\lambda_\tau^{-\varepsilon}.\alpha.\left(\frac{w_\tau}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon}$ et $p.y = U.\lambda_\tau^{-\varepsilon}.\beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}$ (53)

En reportant (53) dans la contrainte (45) on obtient :

$$U.\lambda_\tau^{-\varepsilon} = \frac{R_0 + w_\tau.T}{\alpha.\left(\frac{w_\tau}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \tag{54}$$

En reportant (54) dans (52), on obtient :

$$x_\tau = \frac{(R_0 + w_\tau.T).\left(\frac{w_\tau}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\frac{w_\tau}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad y_\tau = \frac{(R_0 + w_\tau.T).\left(\frac{p}{\beta}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\frac{w_\tau}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \tag{55}$$

Compte tenu des définitions (7), on observe que : $\alpha.\left(\frac{w_\tau}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} = W.(1-\tau)^{1-\varepsilon}$ (56)

Les relations (55) s'écrivent alors :

$$x_\tau = \frac{[R_0 + w.T.(1-\tau)].(1-\tau)^{-\varepsilon}}{W.(1-\tau)^{1-\varepsilon} + P}.\frac{W}{w} \quad \text{et} \quad y_\tau = \frac{R_0 + w.T.(1-\tau)}{W.(1-\tau)^{1-\varepsilon} + P}.\frac{P}{p} \qquad (57)$$

➢ *Condition* $x_\tau \le T$ *de participation au marché du travail*

Résultat :

- Considérons le *salaire horaire super-brut* w comme exogène.
- Appelons comme ci-dessus *revenu non salarial critique* la valeur suivante :

$$\boxed{R_0^* = \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\varepsilon}.T.P} \qquad \text{(Rappel : 39)}$$

- Si le revenu non-salarial est inférieur ou égal à cette valeur critique, alors la condition $x_\tau \le T$ de participation de l'agent représentatif au marché du travail est vérifiée pour les valeurs du prélèvement sur le salaire horaire super-brut appartenant à l'intervalle $0 \le \tau < \tau_0$, avec $\boxed{\tau_0 = 1 - \left(\frac{R_0}{R_0^*}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}$ (58)

Le *plafond* τ_0 est inférieur à 1, sauf si $R_0 = 0$

- En revanche, si le revenu non-salarial est supérieur à cette valeur critique, alors la condition $x_\tau \le T$ de participation de l'agent représentatif au marché du travail n'est vérifiée pour aucune des valeurs du prélèvement sur le salaire horaire super-brut appartenant à l'intervalle $0 \le \tau < 1$.

Interprétation : si le revenu non-salarial (qui ici n'est pas imposé) est supérieur au revenu critique, l'agent représentatif n'est pas incité à participer au marché du travail, *a fortiori* si un prélèvement sur le salaire horaire super-brut vient diminuer son salaire net.

Preuve :

- A partir de (57), la condition $x_\tau \le T$ s'écrit :

$$x_\tau = \frac{[R_0 + w.T.(1-\tau)].(1-\tau)^{-\varepsilon}}{W.(1-\tau)^{1-\varepsilon} + P}.\frac{W}{w} \le T \text{, soit :}$$

$$[R_0 + w.T.(1-\tau)].(1-\tau)^{-\varepsilon}.W \le w.T.\left(W.(1-\tau)^{1-\varepsilon} + P\right) \text{, qui donne :}$$

$$(1-\tau)^{-\varepsilon} \le \frac{w}{W}.\frac{T.P}{R_0} \text{, autrement-dit : } (1-\tau)^{-\varepsilon} \le \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\varepsilon}.\frac{T.P}{R_0},$$

c'est-à-dire, en utilisant la valeur critique du revenu non salarial déjà définie en (39) :

$(1-\tau)^{-\varepsilon} \leq \frac{R_0^*}{R_0}$, d'où finalement : $1-\tau \geq \left(\frac{R_0}{R_0^*}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$

La condition de participation au marché du travail s'écrit donc :

$$\tau \leq \tau_0 \quad \text{avec} \quad \tau_0 = 1-\left(\frac{R_0}{R_0^*}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \qquad (59)$$

Conséquences de (59) :

$\tau_0 = 1$ si et seulement si $R_0 = 0$

$\tau_0 < 1$ si et seulement si $R_0 > 0$

$\tau_0 \geq 0$ si et seulement si $R_0 \leq R_0^*$.

Donc si $R_0 > R_0^*$, alors τ_0 est négatif et par suite la condition (59) de participation au marché du travail n'est vérifiée pour *aucune* des valeurs du taux de prélèvement sur le salaire super-brut horaire appartenant à l'intervalle $0 \leq \tau < 1$.

Si en revanche $R_0 \leq R_0^*$, alors τ_0 est compris entre 0 et 1 et la condition (59) de participation au marché du travail requiert que le taux de prélèvement sur le salaire brut horaire appartienne à l'intervalle $0 \leq \tau < \tau_0$. cqfd

➢ *Proportions du loisir et du bien public par rapport à la consommation de bien privatif composite*

Il découle de (52) ainsi que de (55) que $\boxed{\frac{x_\tau}{y_\tau} = \frac{\hat{x}}{\hat{y}}(1-\tau)^{\varepsilon}}$. Le prélèvement sur le salaire au taux τ, changeant les *prix relatifs*, change la *proportion* entre loisir et consommation de bien privatif composite.

De façon analogue, il découle de (49) que le rapport $\frac{z_\tau}{y_\tau}$ est différent du rapport $\frac{\hat{z}}{\hat{y}}$.

Conséquence : il n'existe aucun taux de prélèvement τ sur le salaire qui permettrait d'obtenir à la fois $x_\tau = \hat{x}$, $y_\tau = \hat{y}$ et $z_\tau = \hat{z}$. Il en résulte que, quel que soit τ, le vecteur (x_τ, y_τ, z_τ) est différent du vecteur $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, et que par conséquent le niveau de satisfaction obtenu « avec prélèvement sur le salaire» est inférieur au niveau de satisfaction « de premier rang » donné par (16).

➢ *Recherche par les pouvoirs publics de la valeur de τ pour laquelle la satisfaction de l'agent représentatif serait maximale.*

Soit à résoudre l'équation (50.2).

Avec la CES : $\frac{\partial U}{\partial x}=\alpha.\left(\frac{x}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}$ $\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\beta.\left(\frac{y}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}$ $\quad \frac{\partial U}{\partial z}=\gamma.\left(\frac{z}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}$ (60)

Reportons dans (50.2), divisons les deux membres par $\frac{\partial U}{\partial y}$, puis utilisons les dérivées logarithmiques et divisons par y_τ. La condition (50.2) s'écrit :

$$\alpha.\left(\frac{x_\tau}{y_\tau}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}.\frac{\frac{\partial x_\tau}{\partial \tau}}{x\tau}+\beta.\frac{\frac{\partial y_\tau}{\partial \tau}}{y_\tau}+\gamma.\left(\frac{z_\tau}{y_\tau}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}.\frac{\frac{\partial z_\tau}{\partial \tau}}{z_\tau}=0 \quad (61)$$

On se limitera à quelques indications. Les parenthèses sont toutes positives.

Calculons les dérivées logarithmiques.

- *Dérivée logarithmique de x_τ par rapport à τ*

Résultat :

On met en évidence l'existence d'une valeur « pivot » $\boxed{R_0^{**}=R_0^{*}\frac{(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon.P/W}}$ du revenu non salarial. Voir <u>figure n° A.3</u>.

- o Si $0\le R_0\le R_0^{**}$, alors lorsque le taux de prélèvement τ sur le salaire horaire *superbrut* croît à partir de 0, le loisir x_τ commence par décroître, passe par un minimum pour une valeur $\tau=\tilde{\tau}_x$, puis augmente (très rapidement) et atteint T pour $\tau=\tau_0$; autrement dit, le temps de travail augmente, passe par un maximum, puis décroît (rapidement) jusqu'à 0.
- o Si $R_0>R_0^{**}$, lorsque τ le taux de prélèvement τ sur le salaire horaire *superbrut* croît à partir de 0, alors x_τ croît continuellement et atteint T pour $\tau=\tau_0$; autrement dit, le temps de travail décroît continuellement et s'annule $\tau=\tau_0$

Preuve :

De (57) on tire : $\frac{\partial x_\tau}{\partial \tau}=\frac{-w.T}{R_0+w.T.(1-\tau)}+\frac{\varepsilon}{1-\tau}+\frac{(1-\varepsilon).W.(1-\tau)^{-\varepsilon}}{W.(1-\tau)^{1-\varepsilon}+P}$, soit :

$$\frac{\partial x_\tau}{\partial \tau}=\frac{-w.T}{R_0+w.T.(1-\tau)}+\frac{W.(1-\tau)^{1-\varepsilon}+\varepsilon.P}{(1-\tau).\left(W.(1-\tau)^{1-\varepsilon}+P\right)}$$

Cette dérivée est du signe de :

$\Delta_{x_\tau}=-w.T.(1-\tau).\left(W.(1-\tau)^{1-\varepsilon}+P\right)+\left(W.(1-\tau)^{1-\varepsilon}+\varepsilon.P\right).\left(R_0+w.T.(1-\tau)\right)$, soit :

$$\Delta_{x_\tau}=R_0.\left(W.(1-\tau)^{1-\varepsilon}+\varepsilon.P\right)-w.T.P.(1-\tau).(1-\varepsilon) \quad (62)$$

La dérivée de x_τ par rapport à τ s'annule donc pour une valeur $\tilde{\tau}_x$ solution de :

$$R_0.\left(W.(1-\tilde{\tau}_x)^{1-\varepsilon}+\varepsilon.P\right)-w.T.P.(1-\varepsilon).(1-\tilde{\tau}_x)=0$$

On pourrait montrer que celle solution $\tilde{\tau}_x$ est unique et positive.

Comment $\tilde{\tau}_x$ se situe-t-elle par rapport à l'intervalle de définition $[0,\tau_0]$ de τ ?

- Si $\tau=\tau_0$, comme par construction (voir plus haut) $(1-\tau_0)^{-\varepsilon}=\frac{w}{W}.\frac{T.P}{R_0}$, alors en reportant dans (62) on obtient tous calculs faits :

$$\Delta_{x_\tau}(\tau_0)=w.T.P.(1-\tau_0).\varepsilon.\left[1+\frac{P}{W.(1-\tau_0)^{1-\varepsilon}}\right]$$, qui est *positif*. (63)

- Si $\tau=0$, alors $\Delta_{x_\tau}(0)=R_0.(W+\varepsilon.P)-w.T.P.(1-\varepsilon)$ (64)

Posons $R_0^{**}=\frac{w.T.P.(1-\varepsilon)}{W+\varepsilon.P}$, qui peut aussi s'écrire : $R_0^{**}=R_0^{*}.\frac{(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon.P/W}$ (65)

Il est clair que $0<R_0^{**}<R_0^{*}$

(64) s'écrit maintenant : $\Delta_{x_\tau}(0)=(W+\varepsilon.P).\left(R_0-R_0^{**}\right)$ (66)

- o Si $0\le R_0\le R_0^{**}$, alors $\Delta_{x_\tau}(0)\le 0$. Dès lors, du fait de (63), lorsque τ augmente à partir de 0, alors x_τ commence par décroître, passe par un minimum pour $\tau=\tilde{\tau}_x$, puis augmente (très rapidement) et atteint T pour $\tau=\tau_0$.
- o Si $R_0>R_0^{**}$, alors $\Delta_{x_\tau}(0)>0$. Dès lors, compte tenu de (63), lorsque τ augmente à partir de 0, alors x_τ croît continuellement et atteint T pour $\tau=\tau_0$.

Remarque : considérons la valeur du loisir x_τ pour $\tau=0$, ou « ordonnée à l'origine ». Il résulte de (55) que cette « ordonnée à l'origine » vaut $T.\frac{W}{W+P}$ pour $R_0=0$; lorsque R_0 croît jusqu'à R_0^{**}, elle croît jusqu'à $T.\frac{W}{W+P}.\frac{R_0^{**}+w.T}{w.T}$ et la « pente à l'origine » de la courbe x_τ est *négative* ; lorsque R_0 croît de R_0^{**} à R_0^{*}, « l'ordonnée à l'origine » croît jusqu'à T et la « pente à l'origine » de la courbe x_τ est *positive*.

Voir la figure A.2.

- Dérivée logarithmique de y_τ.

Résultats :

- Cette dérivée est *négative*. Lorsque τ croît, y_τ décroît.
- Lorsque τ atteint sa borne supérieure τ_0, y_τ atteint sa limite inférieure, qui n'est pas nulle.

Preuve : De (57) on tire : $\dfrac{\partial y_\tau}{\partial \tau} = \dfrac{-w.T}{R_0 + w.T.(1-\tau)} + \dfrac{(1-\varepsilon).W.(1-\tau)^{-\varepsilon}}{W.(1-\tau)^{1-\varepsilon} + P}$, soit :

Cette dérivée est du signe de :

$\Delta_{y_\tau} = -w.T.\left(W.(1-\tau)^{1-\varepsilon} + P\right) + (1-\varepsilon).W.(1-\tau)^{1-\varepsilon}.(R_0 + w.T.(1-\tau))$, soit :

$$\Delta_{y_\tau} = R_0.(1-\varepsilon).W.(1-\tau)^{-\varepsilon} - w.T.\left(\varepsilon.W.(1-\tau)^{1-\varepsilon} + P\right) \qquad (68)$$

La dérivée de y_τ par rapport à τ s'annule donc pour une valeur $\tilde{\tau}_y$ solution de :

$$R_0.(1-\varepsilon).W.\left(1-\tilde{\tau}_y\right)^{-\varepsilon} - w.T.\left(\varepsilon.W.\left(1-\tilde{\tau}_y\right)^{1-\varepsilon} + P\right) = 0$$

On pourrait montrer que celle solution $\tilde{\tau}_y$ est unique et positive.

Comment $\tilde{\tau}_y$ se situe-t-elle par rapport à l'intervalle de définition $[0, \tau_0]$ de τ ?

Montrons que $\tilde{\tau}_y$ n'appartient pas à l'intervalle $[0, \tau_0]$. Pour cela, il suffit de montrer que Δ_{y_τ} a le même signe aux deux bornes de cet intervalle, pour tout R_0 tel que $0 \le R_0 \le R^*$.

- Si $\tau = \tau_0$, comme par construction (voir plus haut) $(1-\tau_0)^{-\varepsilon} = \dfrac{w}{W}.\dfrac{T.P}{R_0}$, alors en reportant dans (65) on obtient tous calculs faits :

$\Delta_{y_\tau}(\tau_0) = -w.T.P.\varepsilon.\left[1 + \dfrac{W.(1-\tau_0)^{1-\varepsilon}}{P}\right]$, qui est *négatif*.

- Si $\tau = 0$, alors $\Delta_{y_\tau}(0) = R_0.W.(1-\varepsilon) - w.T.[\varepsilon.W + P]$ (69)

Il est clair que si $0 \le R_0 \le R^*$, alors $\Delta_{y_\tau}(0) < 0$. En effet, pour $R_0 = R^*$, comme $R^* = w.T.P/W$, en reportant dans (66) on obtient : $-\varepsilon.w.T.P.\left(1 + \dfrac{W}{P}\right)$, qui est *négatif*. Or $\Delta_{y_\tau}(0)$ est une fonction croissante de R_0. Donc $\Delta_{y_\tau}(0) < 0$ pour tout $R_0 \le R^*$. On le vérifie directement sur (66) pour $R_0 = 0$.

Conséquence :

Pour tout R_0 tel que $0 \le R_0 \le R^*$, lorsque τ croît, y_τ décroît. cqfd

- Variations de z_τ.

Partons de l'équation $\boxed{z_\tau = \tau.\frac{w}{q/n}.(T - x_\tau)}$ (rappel 49)

Il est clair que z_τ est nulle d'une part si $\tau = 0$ (pas de prélèvement sur le salaire horaire), d'autre part, d'autre part si $\tau = \tau_0$ (le temps de travail de l'agent représentatif s'annule).

➢ *Optimum de second rang avec prélèvement sur le salaire horaire superbrut*

Compte tenu de la forme (6.1) de la fonction d'utilité, avec $0 < \varepsilon < 1$, la nullité d'un argument implique la nullité de la satisfaction. Compte tenu des remarques ci-dessus, la satisfaction est donc nulle pour $\tau = 0$ d'une part et pour $\tau = \tau_0$ d'autre part. Elle admet donc[1] (au moins) un maximum pour une valeur $\hat{\tau}$ positive ; on admettra que cette valeur est unique (mais elle dépend, comme τ_0, du montant exogène du revenu non salarial R_0). Cette valeur $\hat{\tau}$ fournit « l'optimum de second rang », relatif à la fiscalité de type « prélèvement sur le salaire horaire *superbrut* ».

➢ *Variation compensatrice de revenu correspondante*

Comme dans le cas de l'impôt sur le revenu, ce second rang impliquant une satisfaction inférieure au « premier rang », on peut lui faire correspondre une « variation compensatrice de revenu[2] », qui est le supplément de revenu qu'il faudrait ajouter à la situation « avec prélèvement $\hat{\tau}$ sur le salaire horaire *superbrut* » pour conserver le niveau de satisfaction « de premier rang » : cette variation de revenu peut ainsi être assimilée à la perte monétarisée de satisfaction[3] provoquée par l'application du prélèvement au taux $\hat{\tau}$ sur le salaire horaire *superbrut*. En cas de prélèvement sur le salaire horaire *superbrut* à un taux différent de $\hat{\tau}$, la « variation compensatrice de revenu » serait encore plus forte (la détérioration supplémentaire serait, en première approximation, proportionnelle à $(\tau - \hat{\tau})^2$).

2.4. Cas d'une taxe de taux θ appliquée au prix du bien privatif composite

Supposons maintenant que le prélèvement obligatoire prenne (exclusivement) la forme d'une taxe de taux θ augmentant le prix du bien composite, à l'instar de la TVA. Ce prix, toutes taxes comprises (TTC), deviendrait : $\boxed{p_\theta = p.(1+\theta)}$ (70)

La contrainte budgétaire de l'agent représentatif s'écrit maintenant :

$$(R_0 + w.T) - w.x - p_\theta.y = 0 \quad (71)$$

L'agent représentatif est amené à considérer le Lagrangien suivant :

$$\Lambda(x, y, \lambda_\theta) = U(x, y|z) + \lambda_\theta.[(R_0 + w.T) - w.x - p_\theta.y] \quad (72)$$

---

(1) Théorème de Rolle.
(2) Voir par exemple P. Picard (2002) « Eléments de microéconomie » page 96.
(3) Par rapport à l'optimum de premier rang, ou à la taxation forfaitaire qui permettrait d'atteindre cet optimum de premier rang.

La maximisation de ce Lagrangien conduit aux conditions du premier ordre suivantes :

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{w} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{p_\theta} = \lambda_\theta \qquad (73)$$

qui, conjointement avec (71), déterminent les valeurs optimales x_θ, y_θ en fonction de R_0, θ, w, p et de l'exogène z .

Connaissant x_θ, y_θ, il est possible de calculer les ressources fiscales, qui sont égales à :

$$\boxed{(p_\theta - p).y_\theta = \theta.p.y_\theta} \qquad (74)$$

de sorte que le volume z du bien public est égal à : $\boxed{z_\theta = \theta.\frac{p}{q/n}.y_\theta}$ (75)

La satisfaction atteinte par l'agent représentatif est donc $U(x_\theta, y_\theta, z_\theta)$.
Les pouvoirs publics sont alors censés fixer la valeur de θ qui maximise $U(x_\theta, y_\theta, z_\theta)$, c'est-à-dire qui est solution de :

$$\frac{\partial U}{\partial x_\theta}.\frac{\partial x_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial y_\theta}.\frac{\partial y_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial z_\theta}.\frac{\partial z_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad (76.1)$$

(76.1) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$x_\theta.\frac{\partial U}{\partial x_\theta}.\frac{\frac{\partial x_\theta}{\partial \theta}}{x_\theta} + y_\theta.\frac{\partial U}{\partial y_\theta}.\frac{\frac{\partial y_\theta}{\partial \theta}}{y_\theta} + z_\theta.\frac{\partial U}{\partial z_\theta}.\frac{\frac{\partial z_\theta}{\partial \theta}}{z_\theta} = 0 \qquad (76.2)$$

Justifications dans le cas de la CES

➢ Les équations (73) deviennent :

$$\frac{\alpha.(x/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{w} = \frac{\beta.(y/U)^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{p_\theta} = \lambda_\theta \qquad (77)$$

On en tire : $x = U.\lambda_\theta^{-\varepsilon}.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}$ et $y = U.\lambda_\theta^{-\varepsilon}.\left(\frac{p_\theta}{\beta}\right)^{-\varepsilon}$ (78)

Par suite : $w.x = U.\lambda_\theta^{-\varepsilon}.\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon}$ $p_\theta.y = U.\lambda_\theta^{-\varepsilon}.\beta.\left(\frac{p_\theta}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}$ (79)

En reportant (79) dans la contrainte (71) on obtient :

$$U.\lambda_\theta^{-\varepsilon} = \frac{R_0 + w.T}{\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p_\theta}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \quad (80)$$

En reportant (80) dans (78), on obtient :

$$x_\theta = \frac{(R_0 + w.T).\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p_\theta}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad y_\theta = \frac{(R_0 + w.T).\left(\frac{p_\theta}{\beta}\right)^{-\varepsilon}}{\alpha.\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{1-\varepsilon} + \beta.\left(\frac{p_\theta}{\beta}\right)^{1-\varepsilon}}$$

(81)

Compte tenu des définitions (7), on observe que : $\beta.\left(\frac{p_\theta}{\beta}\right)^{1-\varepsilon} = Y.(1+\theta)^{1-\varepsilon}$ (82)

Les relations (81) s'écrivent alors plus simplement :

$$x_\theta = \frac{R_0 + w.T}{W + P.(1+\theta)^{1-\varepsilon}}.\frac{W}{w} \quad \text{et} \quad y_\theta = \frac{(R_0 + w.T).(1+\theta)^{-\varepsilon}}{W + P.(1+\theta)^{1-\varepsilon}}.\frac{P}{p} \quad (83)$$

Compte tenu des relations (8), les relations (83) peuvent s'écrire :

$$x_\theta = \hat{x}.\frac{W + P + Q}{W + P.(1+\theta)^{1-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad y_\theta = \hat{y}.\frac{W + P + Q}{W + P.(1+\theta)^{1-\varepsilon}}.(1+\theta)^{-\varepsilon} \quad (84)$$

- Il découle de (78) ainsi que de (84) que $\boxed{\frac{x_\theta}{y_\theta} = \frac{\hat{x}}{\hat{y}}(1+\theta)^{\varepsilon}}$. La taxe θ, changeant les *prix relatifs*, change la *proportion* entre loisir et consommation de bien privatif composite.

De façon analogue, il découle de (75) que le rapport $\frac{z_\theta}{y_\theta}$ est différent du rapport $\frac{\hat{z}}{\hat{y}}$.

Conséquence : il n'existe aucun taux de la taxe θ sur le bien privatif composite qui permettrait d'obtenir à la fois $x_\theta = \hat{x}$, $y_\theta = \hat{y}$ et $z_\theta = \hat{z}$. Il en résulte que, quel que soit θ, le vecteur $(x_\theta, y_\theta, z_\theta)$ est différent du vecteur $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, et que par conséquent le niveau de satisfaction obtenu « avec taxe sur le bien privatif composite » est inférieur au niveau de satisfaction « de premier rang » donné par (16).

- *Recherche par les pouvoirs publics de la valeur de θ pour laquelle la satisfaction de l'agent représentatif serait maximale.*

Soit à résoudre l'équation (73.2)

Avec la CES : $\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha.\left(\frac{x}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \beta.\left(\frac{y}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma.\left(\frac{z}{U}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}$ (85)

Reportons dans (76.2), divisons les deux membres par $\frac{\partial U}{\partial y}$, puis utilisons le dérivées logarithmiques et divisons par y_θ. La condition (76.2) s'écrit :

$$\alpha.\left(\frac{x_\theta}{y_\theta}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}.\frac{\frac{\partial x_\theta}{\partial\theta}}{x\theta} + \beta.\frac{\frac{\partial y_\theta}{\partial\theta}}{y_\theta} + \gamma.\left(\frac{z_\theta}{y_\theta}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}.\frac{\frac{\partial z_\theta}{\partial\theta}}{z_\theta} = 0 \qquad (86)$$

On se limitera à quelques indications. Les parenthèses sont toutes positives. Calculons les dérivées logarithmiques.

- Dérivée logarithmique de x_θ : elle est *négative*.

Preuve : dans (83), $(1+\theta)^{1-\varepsilon}$ intervient au *dénominateur*, avec un coefficient positif. Avec l'hypothèse $0 < \varepsilon < 1$, x_θ est dès lors une fonction décroissante de θ ; la dérivée (logarithmique) est donc *négative*.

Conséquence : lorsque θ augmente, le loisir décroît et le temps de travail augmente.

Remarque : si[1] θ variait de 0 à $+\infty$, il résulte de (81) que x_θ diminuerait de $\hat{x}.\frac{W+P+Q}{W+P}$ à 0.

- Dérivée logarithmique de y_θ : elle est *négative*.

Preuve : dans (84), $(1+\theta)^{1-\varepsilon}$ intervient au *dénominateur*, avec un coefficient positif, et $(1+\theta)^{-\varepsilon}$ au *numérateur*, avec un coefficient positif. Avec l'hypothèse $0 < \varepsilon < 1$, y_θ est dès lors une fonction décroissante de θ ; la dérivée (logarithmique) est donc *négative*.

Conséquence : lorsque θ augmente, la consommation de bien privatif composite diminue.

Remarque : si θ variait de 0 à $+\infty$, il résulte de (84) que y_θ diminuerait de $\hat{y}.\frac{W+P+Q}{W+P}$ à 0.

- Dérivée logarithmique de z_θ : elle est *positive*.

(1) Hypothèse purement mathématique, sans signification socio-économique.

Preuve :

À partir de (75), le calcul donne :

$$\frac{\frac{\partial z_\theta}{\partial \theta}}{z_\theta} = \frac{1}{\theta} - \frac{\varepsilon}{1+\theta} - \frac{(1-\varepsilon).Y.(1+\theta)^{-\varepsilon}}{X + Y.(1+\theta)^{1-\varepsilon}}$$, du signe de :

$$\Delta_z = \left[X + Y.(1+\theta)^{1-\varepsilon}\right].[1+\theta.(1-\varepsilon)] - \theta.(1-\varepsilon).Y.(1+\theta)^{1-\varepsilon}$$, qui donne :

$$\Delta_z = X.[1+\theta.(1-\varepsilon)] + Y.(1+\theta)^{1-\varepsilon}$$, *positif.* cqfd

Conséquence : lorsque θ augmente, la consommation de bien public augmente.

Remarque : si θ variait de 0 à $+\infty$, on pourrait montrer à partit de (75) que z_θ augmenterait de 0 à $\hat{z}.\frac{W+P+Q}{Q}$

➢ *Optimum de second rang avec taxe de type TVA*

Compte tenu de la forme (6.1) de la fonction d'utilité, avec $0 < \varepsilon < 1$, la nullité d'un argument implique la nullité de la satisfaction. Compte tenu des remarques ci-dessus, la satisfaction est donc nulle pour $\theta = 0$ d'une part et pour $\theta \to +\infty$ d'autre part. Elle admet donc[1] (au moins) un maximum pour une valeur $\hat{\theta}$ positive ; on admettra que cette valeur est unique. Cette valeur $\hat{\theta}$ fournit « l'optimum de second rang », relatif à la fiscalité de type TVA.

➢ *Variation compensatrice de revenu correspondante*

Comme dans les deux cas précédents, ce second rang impliquant une satisfaction inférieure au « premier rang », on peut lui faire correspondre une « variation compensatrice de revenu[2] », qui est le supplément de revenu qu'il faudrait ajouter à la situation « avec taxe au taux $\hat{\theta}$ sur le bien privatif composite» pour conserver le niveau de satisfaction « de premier rang » : cette variation de revenu peut ainsi être assimilée à la perte monétarisée de satisfaction[3] provoquée par l'application de la taxe au taux $\hat{\theta}$ sur le bien privatif composite. En cas de taxe à un taux différent de $\hat{\theta}$ sur le bien privatif composite, la « variation compensatrice de revenu » serait encore plus forte (la détérioration supplémentaire serait, en première approximation, proportionnelle à $(\theta - \hat{\theta})^2$).

(1) héorème de Rolle.

(2) Voir P. Picard (2002) , jam. cit.

(3) Par rapport à l'optimum de premier rang, ou à la taxation forfaitaire qui permettrait d'atteindre cet optimum de premier rang.

2.5. Cas de prélèvements obligatoires multiformes

Dans la réalité, les prélèvements obligatoires sont multiformes. Les différentes modalités de prélèvements examinées isolément ci-dessus s'appliquent en fait simultanément. On pourrait donc par exemple reprendre la démarche suivie ci-dessus et considérer un « vecteur de prélèvement » (ρ,τ,θ), avec $0\leq\rho\leq1$, $0\leq\tau\leq1$ et $\theta\geq0$. Il y aurait lieu d'une part d'analyser le Lagrangien correspondant des décisions de l'agent représentatif, d'autre part d'écrire que le bien public est dimensionné pour absorber les recettes procurées par les prélèvements obligatoires. La solution comporterait un degré de satisfaction inévitablement inférieur à l'optimum de premier rang, mais il conviendrait de chercher la « structure fiscale optimisée » permettant néanmoins de minimiser l'écart, c'est-à-dire d'atteindre un optimum de second rang.

Plusieurs cas de figures sont *a priori* envisageables :

- Il se peut que la solution soit un « optimum libre[1] », comportant une structure notée ici (ρ',τ',θ'), dans laquelle chacun des impôts serait à l'intérieur (strictement) de son intervalle de définition. Toute petite déviation par rapport à cette structure fiscale optimisée induirait alors, par rapport à l'optimum de second rang, une perte de satisfaction du second ordre.
- Mais, comme on l'a rencontré dans les cas précédents, le processus d'optimisation peut le cas échéant venir buter sur des conditions d'existence, et notamment de participation au marché du travail, sous l'effet –entre autres- du niveau du revenu non-salarial, ou plus exactement du rapport entre ces revenus et le salaire horaire *superbrut*.
- On peut alors aboutir à des solutions « en coin », qui consisteraient à annuler tel ou tel type d'impôt, amputant davantage le bien-être que les autres.
- Cependant, certains types de prélèvements obligatoires paraissant coûteux en termes de bien-être peuvent en fait trouver leur justification dans des contraintes institutionnelles ou socio-économiques non prises en compte dans l'approche schématique examinée jusqu'ici dans la présente note. Il est ainsi, par exemple, des prélèvements de type cotisations sur le salaire *superbrut* qui, en réalité, sont « fléchées » vers le financement des retraites par répartition, l'assurance maladie (partiellement) ou l'indemnisation du chômage, et non vers le financement de bien publics ordinaires.

Une approche plus approfondie exigerait donc une modélisation beaucoup complexe, qui excède largement le cadre de la présente note.

* * * * *

Post-scriptum : PIB versus bien-être

On pourrait calculer un taux d'imposition qui serait neutre sur le PIB et l'emploi, mais qui, déplaçant le partage entre bien privatif et bien public, induirait néanmoins une perte de satisfaction par rapport à l'optimum de premier rang.

---

(1) Système de trois équations de type (32.2), chacune étant une annulation de dérivée partielle, par rapport respectivement aux trois inconnues (ρ,τ,θ).

En effet, considérons par exemple le dernier cas, celui d'un prélèvement obligatoire prenant exclusivement la forme d'une taxe du type TVA sur le prix du bien privatif composite. On a vu que si θ variait de 0 à $+\infty$, alors x_θ diminuerait de $\hat{x}.\dfrac{W+P+Q}{W+P}$ à 0. Il existe donc une valeur notée $\ddot{\theta}$ pour laquelle on aurait $x(\ddot{\theta}) = \hat{x}$.

De (84) on tire aisément :

$$\ddot{\theta} = \left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} -1 .$$

Interprétation : si une taxe au taux $\ddot{\theta}$ était instaurée sur le bien privatif composite, alors le loisir et donc le temps de travail de l'agent représentatif seraient les mêmes qu'à l'optimum de premier rang. Autrement dit, la participation au marché du travail serait donc la même qu'à l'optimum de premier rang.

Supposons en outre, pour simplifier, que la fonction de production soit la même pour le bien privatif et pour le bien public. Il en résulte que l'équilibre du marché du travail serait le même qu'à l'optimum de premier rang. A revenus non-salariaux inchangés, et à salaire horaire *superbrut* inchangé, le PIB serait donc lui aussi le même.

Pourtant, le prix TTC du bien privatif composite étant plus élevé, l'agent représentatif en consommerait moins ; en contrepartie, il consommerait plus de bien public. Ce désajustement, invisible sur le PIB et sur le marché du travail, se traduirait néanmoins par une moindre satisfaction.

Des considérations analogues pourraient être formulées pour la taxe sur l'emploi, mais la valeur $\ddot{\tau}$ dépendrait de R_0 et il resterait de ce fait à en discuter l'existence, ce que l'on ne tentera pas ici.

* * * * *

Limites de l'approche en équilibre partiel examinée ci-dessus

a) L'offre est passée sous silence

L'approche adoptée dans la présente annexe ignore le bloc de l'offre. Il y aurait lieu d'introduite une fonction de production du bien privatif composite, et le cas échéant une autre fonction de production distincte pour le bien public. Le salaire super-brut devrait être endogénéisé, en relation avec la productivité marginale du travail, en supposant le marché du travail à l'équilibre. Dans un premier stade, le capital productif pourrait être considéré comme exogène et le prix du bien privatif composite être fixé à 1 ; mais sur la frontière d'efficacité des facteurs, la rémunération (réelle) du capital est une fonction décroissante du salaire horaire *superbrut* (réel) ; cela impliquerait donc aussi endogénéisation des revenus non-salariaux, du moins de ceux qui proviennent du patrimoine.

b) Le temps de travail n’est pas une variable continue

Dans l’approche examinée, le loisir et le temps de travail sont traités comme des variables continues. En réalité, le temps de travail est une variable très complexe qui dépend de l’organisation productive, de la négociation sociale et du droit du travail, ainsi que de l’organisation de la vie hors travail, à commencer par la vie familiale. En outre, l’offre et la demande de travail sont loin d’être à l’équilibre, comme l’atteste l’importance du chômage. La prise en compte de ces « discontinuités » dépasse considérablement le cadre de la présente **note.**

c) Les agents sont hétérogènes

Il conviendrait de dépasser l’hypothèse de l’agent représentatif pour tenir compte de l’hétérogénéité de la population employée (différences de productivité horaire), de l’existence d’une population inactive, des écarts de patrimoine entraînant notamment des différences de revenus non salariaux, des politiques de redistribution etc.

d) Il n’y a ni épargne, ni investissement

Dans un modèle à plusieurs périodes, il y aurait lieu de tenir compte de l’équilibre épargne-investissement et de la dynamique d’accumulation du capital productif.

e) Il n’y a pas d’échanges extérieurs

L’impact des prélèvements obligatoires sur la compétitivité et sur les mouvements des capitaux est ignoré.